Caio dos Santos Guimarães

Matemática Em Nível IME/ITA

Volume 1:
Números Complexos e Polinômios

1ª Edição

São José dos Campos – SP
2008

Sumário

01 – Números Complexos : Introdução

1.1 – A história dos números complexos.... 07
1.2 – Algumas Definições e Propriedades 09
1.3 – Representação Trigonométrica do Complexo.... 19
1.4 – Representação Exponencial do Complexo.... 22
1.5 – Propriedades Importantes.... 27
1.6 – Raízes n-ésimas da unidade.... 35
1.7 – Exercícios de Fixação 37

02 – Números Complexos: Geometria e os Complexos

2.1 – O complexo como vetor 45
2.2 – A Geometria Plana 51
2.3 – Representação de Lugares Geométricos 59
2.4 – Exercícios de Fixação.... 65

03 – Números Complexos: Aplicação em Somatórios

3.1 – Somatórios Binomiais.... 69
3.2 – Outras Somas 74
3.3 – Interpretação Geométrica.... 79
3.4 – Produtórios.... 81
3.5 – Exercícios de Fixação 82

04 – Polinômios

4.1 – A história dos polinômios 86
4.2 – Introdução: Raízes de um polinômio 88
4.3 – Operações com Polinômios e Fatorações Importantes 96
4.4 – Relações de Girard 108
4.5 – Teorema de Newton 114
4.6 – Teorema de Girard 117
4.7 – MDC de Polinômios e Raízes Comuns 122
4.8 – Raízes Múltiplas.... 128
4.9 – Exercícios de Fixação 132

05 – Polinômios: Equações Algébricas

5.1 – Inspeção Algébrica de Raízes.... 140
5.2 – Equações Recíprocas.... 143
5.3 – Transformadas Polinomiais 150
5.4 – Polinômio Interpolador de Lagrange 161
5.5 – Exercícios de Fixação 166

06 – Polinômios: Análise Gráfica de Funções Polinomiais
6.1 – Traçando Gráficos Polinomiais 168
6.2 – Comportamentos Especiais 177
6.3 – Teorema de Bolzano 187
6.4 – Exercícios de Fixação 191

07 – Resoluções Comentadas
Resoluções Comentadas 195

Apêndice
Apêndice 322

Bibliografia
Bibliografia 333

Projeto Rumo ao ITA
Projeto Rumo ao ITA 334

Prefácio

Os estudantes e professores do segmento IME ITA sempre estudaram Complexos e Polinômios por bons livros didáticos, mas ainda não dispunham do livro que contasse todos os segredos, teoremas e artimanhas poderosas para a resolução de problemas mais avançados de nível IME ITA. O livro só agora foi publicado.

Esse manual de Complexos e Polinômios do Caio Guimarães pode ser chamado de *"O Livro vermelho dos Complexos e Polinômios"*. O autor não poupou esforços para revelar em sua obra todas as ferramentas poderosas importantes relacionadas aos Complexos e Polinômios, fornecendo ao leitor tanto interpretações algébricas quanto geométricas sempre que possível, versatilidade essa que proporcionará ao leitor desse livro *"uma visão além do alcance"*. Mesmo os problemas mais inquietantes agora terão soluções elegantes e concisas, quando se dispõe das melhores ferramentas para resolvê-los. Essas ferramentas foram todas concentradas nessa obra prima.

Assim, é com muita honra que a VestSeller brinda os estudantes e professores de todo o Brasil com a publicação dessa obra de valor inestimável. Estamos certos de que o empenho e a dedicação investidos pelo autor em mais de ano ano de trabalho árduo certamente foram compensados.

Ganhamos todos, os estudantes, os professores e a sofrida educação brasileira

Parabéns ao Caio Guimarães.

Prof. Renato Brito Bastos neto
(autor do livro Mecânica Para Vestibulandos IME ITA)

Apresentação

O livro 'Matemática em Nível IME/ITA' tem como objetivo não somente dar a base aos alunos que desejam encarar as difíceis provas de vestibular do IME e do ITA, mas também ajudar a aumentar a barra de dificuldade das matérias de matemática lecionadas no ensino médio, a fim de atingir o nível exigido nessas provas. A leitura desse material também é indicada a professores de cursos preparatórios para pré-vestibular, principalmente aqueles com ênfase nos vestibulares militares.

Compilamos neste livro um material que contém tanto a carga teórica que o aluno pode precisar para consulta, quanto séries de exercícios (e muitos!), com resoluções, que darão a ele a confiança necessária para encarar o vestibular militar.

Neste primeiro volume, abordamos dois assuntos de extrema importância, e principalmente, reincidência nas provas tanto do IME quanto do ITA: Números Complexos e Polinômios. O nosso objetivo, neste volume, é de, junto à teoria básica desses assuntos, também mostrar diferentes aplicações dos mesmos, bem como diversas 'situações problemas' que podem ser pedidas no "grande dia" da prova e os 'grandes truques' de como se comportar frente a ela.

Caio dos Santos Guimarães

São José dos Campos, SP - 2008

Dedicatória

Esse livro é dedicado à minha família (as pessoas mais importantes na minha vida): Ciro, Lúcia, Marcos e à minha companheira mais do que especial de todos os momentos, Fernanda. Amo vocês!

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos colaboradores desse projeto. Em especial, os que tiveram contato direto com o trabalho. Entre elas cito meus verdadeiros amigos aqui no ITA (meus colegas de quarto), que colaboraram, não só com o apoio moral (e uma amizade fundamental), mas também muitas vezes com seu intelecto, ajudando na confecção de diversas partes do livro: Hélder Suzuki, Henry Wei, Rodolpho Castro, Luiz Adolfo Schiller, Rafael Daigo Hirama, Felipe Moraes. Agradeço a Alessandra Porto pela ajuda com o material para o contexto histórico do livro e pelo pessoal da AER-09 pela ajuda na revisão do material.

Agradeço também aos colaboradores Edmilson Motta (Etapa), a SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) e Sergio Lima Netto, que permitiram o uso de seus artigos e trabalhos para referência. Não poderia esquecer também os grandes mentores que tive durante a minha preparação para o vestibular, os professores e restante da equipe GPI (RJ) – Turma IME/ITA 2003-2005 (verdadeiros mestres que nunca esquecerei!). Junto a eles gostaria de agradecer aos meus companheiros de cursinho (turma IME/ITA GPI 2004): Marcello Nunes, Jorge Veloso, Vinicius Assis; sem eles, eu não teria alcançado os objetivos dos meus sonhos de passar no tão sonhado vestibular.

E, finalmente, gostaria de agradecer à minha família e aos meus amigos, que sempre estiveram presente em todas as minhas dificuldades e sucessos. Na hora de apoiar a escrita desse livro não foi diferente. A eles devo tudo que tenho e conquistei até hoje (e ainda sonho em conquistar!)

Como Estudar o Livro?

O livro é muito voltado a resoluções de questões do nível IME/ITA. Portanto, a teoria apresentada é direcionada a resultados que serão bastante úteis na resolução das questões do gênero. O livro não é destinado àqueles que nunca estudaram o assunto antes. Embora abranja todo conteúdo, para a melhor compreensão do material, é aconselhável que o aluno/professor já tenha tido contato com o assunto previamente.

As questões do IME e do ITA, em geral, abrangem mais de um assunto em um mesmo enunciado, portanto comumente nas questões que aqui são propostas, será requerido que o aluno/professor saiba o básico de outros ramos da matemática (progressões aritméticas e geométricas, geometria analítica, etc.). Quando isso for requisitado em algum segmento da parte teórica, mencionaremos o assunto que deve ser pesquisado (por fora) para a total compreensão do segmento.

Recomendamos que o aluno/professor leia toda a parte teórica (mais de uma vez, se necessário) para a fixação das idéias destacadas (lembre-se que todo o conteúdo aqui apresentado será importante, não sendo aconselhável que parte alguma seja descartada). Dê uma atenção especial aos exemplos resolvidos, que servirão de base para a resolução dos 'Exercícios de Fixação'.

Feito isso, o aluno/professor deve passar então para a parte dos "Exercícios de Fixação". Nessa seção você não encontrará exercícios fáceis (todos têm o estilo de questões IME/ITA), porém encontrará alguns exercícios mais difíceis que os outros. Para melhor orientação criamos o seguinte código:

⚡ - Nível Difícil
☠ - Nível Insano

Muitas das questões acompanham o nome de onde foram tiradas (algum vestibular, ou livro citado na bibliografia). Em alguns casos é comum ver a palavra 'adaptada' junto à referência. Isso acontece nos casos em que a questão é a mesma que caiu no vestibular citado, porém com alguma alteração, tornando-a mais interessante para o nosso assunto (em alguns casos, a adaptação é tornar uma questão múltipla-escolha em discursiva).

Recomendamos que, tendo resolvido as questões propostas em cada capítulo, o leitor olhe as resoluções comentadas no Capítulo 7 para conferir suas respostas e confirmar se não houve algum descuido na hora de formular sua solução. Lembramos aos leitores que organização é fundamental na hora de resolver uma questão numa prova (a banca precisa entender seu raciocínio), então recomendamos que o leitor se baseie no estilo de formulação das soluções propostas no capitulo 7 para treinar sua 'escrita'.

Bons estudos!

Capítulo 1 - Números Complexos Introdução

1.1 A História dos Complexos

A entidade conhecida na Matemática por número complexo é um número da forma a + bi, onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária, possuindo a propriedade de que $i^2 = -1$, ou ainda, $i = \sqrt{-1}$.

Mas qual o sentido e, mais importante, a utilidade, de se definir a raiz de números negativos? De onde surgiu o conceito de número complexo?

Os matemáticos da Grécia antiga julgavam óbvia a constatação de que um número negativo não possuía raiz. As equações matemáticas eram representações de problemas concretos – ou seja, chegando-se à raiz de um negativo, concluía-se que o problema não tinha solução.

A necessidade de se atribuir um sentido à raiz de -1 não surgiu, como muitos crêem, a partir do estudo das equações de segundo grau, mas sim da análise da solução de Cardano-Tartaglia para as equações de terceiro grau da forma:

$$x^3 = ax + b$$

A solução dessa equação (veremos a demonstração adiante) é dada por:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

De acordo com o raciocínio anterior sobre raízes de negativos, uma equação dessa forma só terá solução se

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 \geq 0$$

Mas tomemos como exemplo a equação $x^3 = 15x + 4$. É evidente que x = 4 é solução dessa equação, pois $4^3 = 64 = 15.4 + 4$.

No entanto,

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3 = 2^2 - 5^3 = -121 < 0$$

De acordo com os matemáticos da Grécia antiga a equação não tem solução! Porém acabamos de ver que a equação admite x = 4 como solução. E agora?

Isso significaria que:

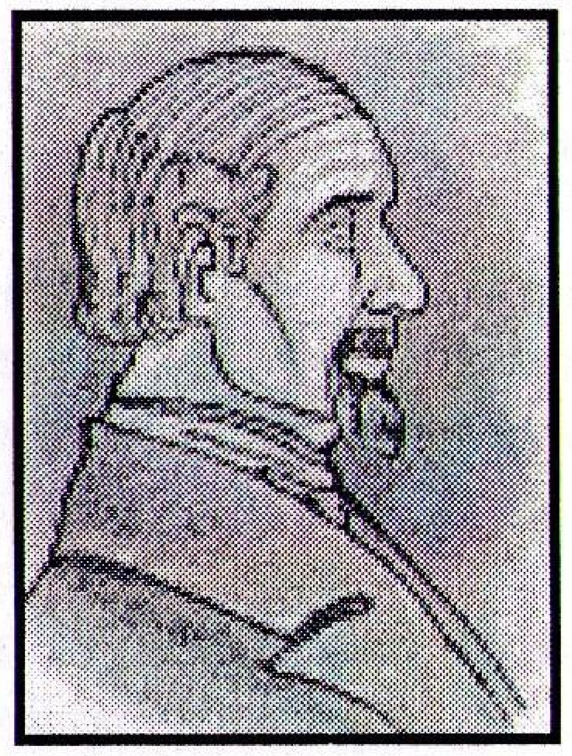
$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 4 \quad ??!!!$$

Foi o matemático Bombelli, em 1572, quem encontrou uma forma de lidar com esse aparente absurdo.

Ele decidiu considerar as raízes quadradas de números negativos como verdadeiros números. Sua proposta levaria à seguinte representação:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = A + \sqrt{B} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = A - \sqrt{B}$$

Onde A e B são números reais.


Rafael Bombelli

Tal representação faria com que o resultado não parecesse tão "absurdo" assim.

$$A + \sqrt{B} + A - \sqrt{B} = 2A$$

Será que a proposta de Bombelli é viável? Ao longo do nosso estudo dos números complexos veremos que sim. Hoje em dia, já sabemos que, de fato:

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

A aceitação dos complexos como números demorou a se tornar realidade. Grande parte dos matemáticos, entre eles o próprio Cardano, buscou formas de se resolver problemas semelhantes sem ter que recorrer ao uso dos *números sofísticos*, como eram chamados na época.

Não obtiveram bons resultados. Foi somente em 1890 que o matemático Capelli provou que essa era uma tarefa impossível. Somente após isso foi que começou o desenvolvimento desse novo conceito na álgebra: os Números Complexos.

Nessa nova fase do desenvolvimento da matemática tiveram papéis importantes grandes matemáticos, como Euler (antes do trabalho de Capelli), Gauss, Argand e Cauchy. Nós veremos na teoria a seguir os nomes deles mencionados em resultados importantes envolvendo números complexos.

1.2 Algumas Definições e Propriedades

Devido à grande necessidade para o progresso da matemática, surgiu o ramo dos números complexos ao se criar a unidade imaginária i, definida como:

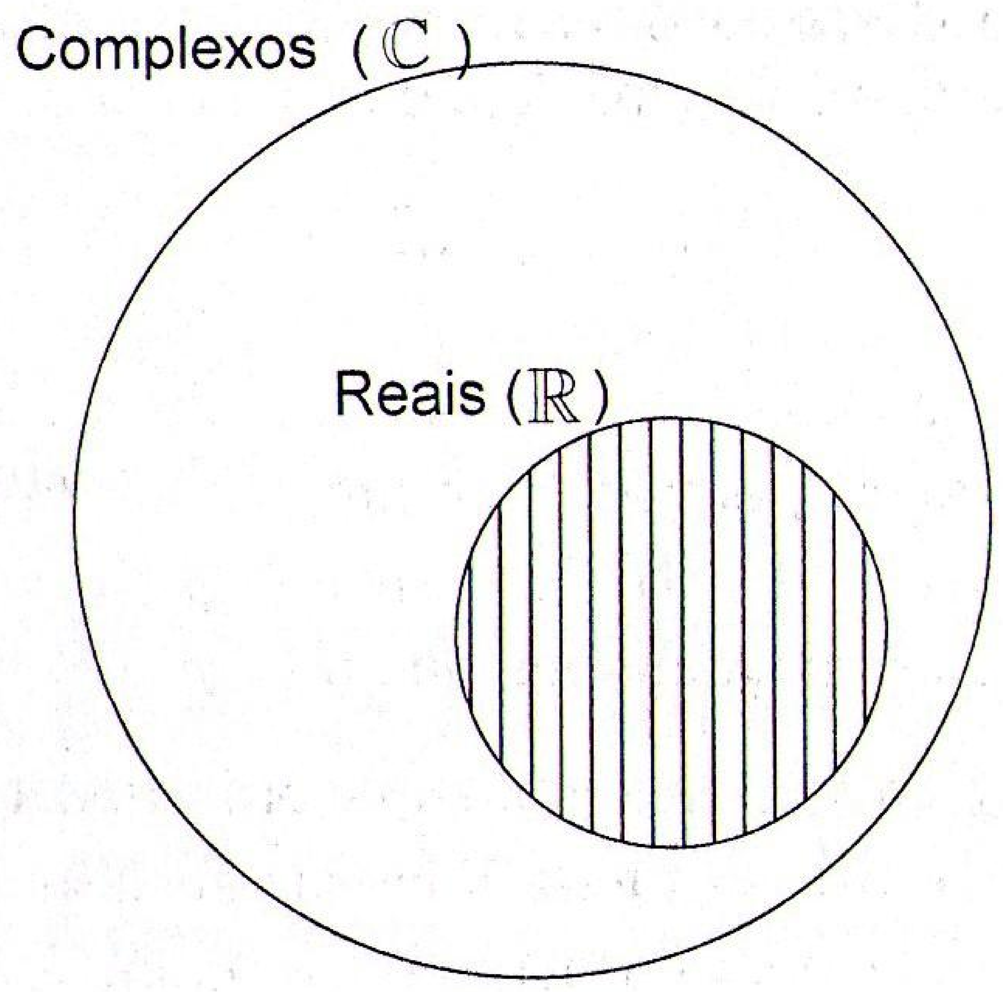
$$i = \sqrt{-1}$$

Um número z é dito complexo quando puder ser escrito da forma:

$$z = x + y.i \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

Notação: A partir de agora, chamaremos de *parte real* de z o termo x, e o denotaremos por: $x = \mathrm{Re}(z)$. Da mesma forma, y é chamado de *parte imaginária* de z e é denotado por: $y = \mathrm{Im}(z)$.

Devemos nos atentar ao fato de que o conjunto dos números reais é um subconjunto do conjunto dos Complexos, uma vez que todo número real nada mais é que um número complexo com parte imaginária nula.



Propriedade Cíclica das Potências de i

Da definição da unidade imaginária:

$$i=\sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1 \\ i^3 = i^2.i = -1.i = -i \\ i^4 = i^3.i = -i.i = -i^2 = 1 \end{cases}$$

Usando o mesmo raciocínio indefinidamente, temos que:

$$i^0 = i^4 = i^8 = i^{12} = ... = 1$$
$$i^1 = i^5 = i^9 = i^{13} = ... = i$$
$$i^2 = i^6 = i^{10} = i^{14} = ... = -1$$
$$i^3 = i^7 = i^{11} = i^{15} = ... = -i$$

Podemos generalizar esse resultado da seguinte forma:

$$i^n = i^k \qquad n,k \in \mathbb{Z},\ n>4$$

k é o resto da divisão de n por 4

Repare que interessante! Sabendo as 4 primeiras potências da unidade imaginária podemos determinar um valor para qualquer outra potência inteira.

A seguir, citamos alguns outros resultados notáveis que podem ajudar na hora de fazer contas. Agilidade é tudo em uma prova corrida!

Resultados Notáveis:

$$\begin{cases} (1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i \\ (1-i)^2 = 1-2i+i^2 = 1-2i-1 = -2i \\ \dfrac{(1+i)}{(1-i)} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2i}{1^2-i^2} = \dfrac{2i}{2} = i \\ \dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i.i} = \dfrac{i}{-1} = -i \end{cases}$$

Identidade de Números Complexos

Dizemos que dois números complexos são iguais quando as partes real e imaginária são respectivamente iguais nos dois números.

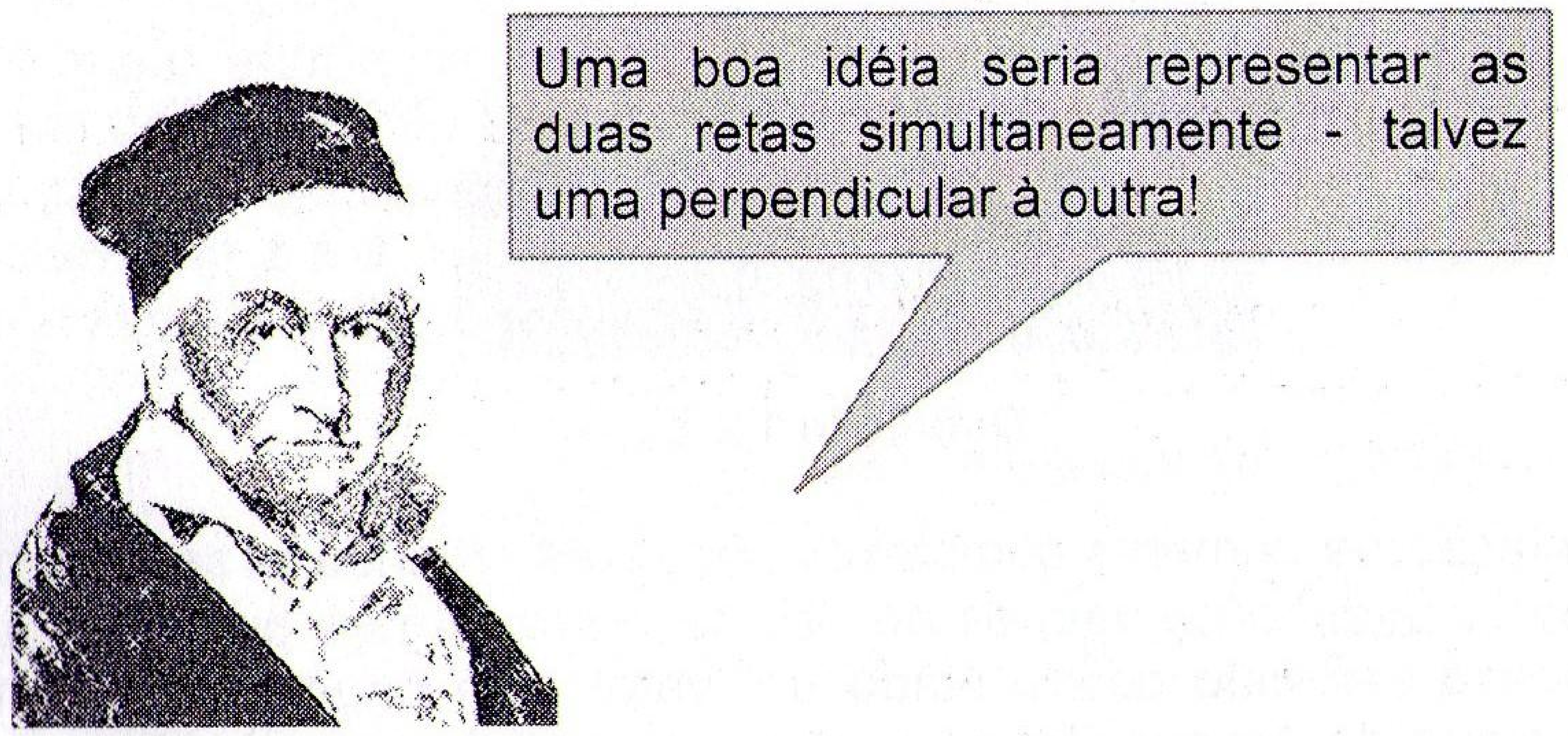
$$a+b.i = c+d.i \iff \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

Definição 1.2.1

Por mais simples que essa definição de igualdade possa parecer, vamos ver mais a frente que ela vai ajudar muito em algumas resoluções de exercícios.

Representação Gráfica dos Números Complexos

Uma comum representação dos números reais é distribuí-los uniformemente ao longo de uma reta. Como a parte imaginária de todo complexo nada mais é do que um número real (acompanhado multiplicado por i) podemos representar também a parte imaginária dos complexos ao longo de uma reta!



Carl F. Gauss

Seguindo a sugestão de Gauss, trabalharemos com a representação dos complexos num plano. O plano complexo, também conhecido como *plano de Argand-Gauss*, tem como eixos: a reta real (na horizontal) e a reta imaginária (na vertical). Sendo assim, podemos então representar um complexo $z = x + y.i$ no plano de Argand-Gauss, como é feito na figura a seguir.

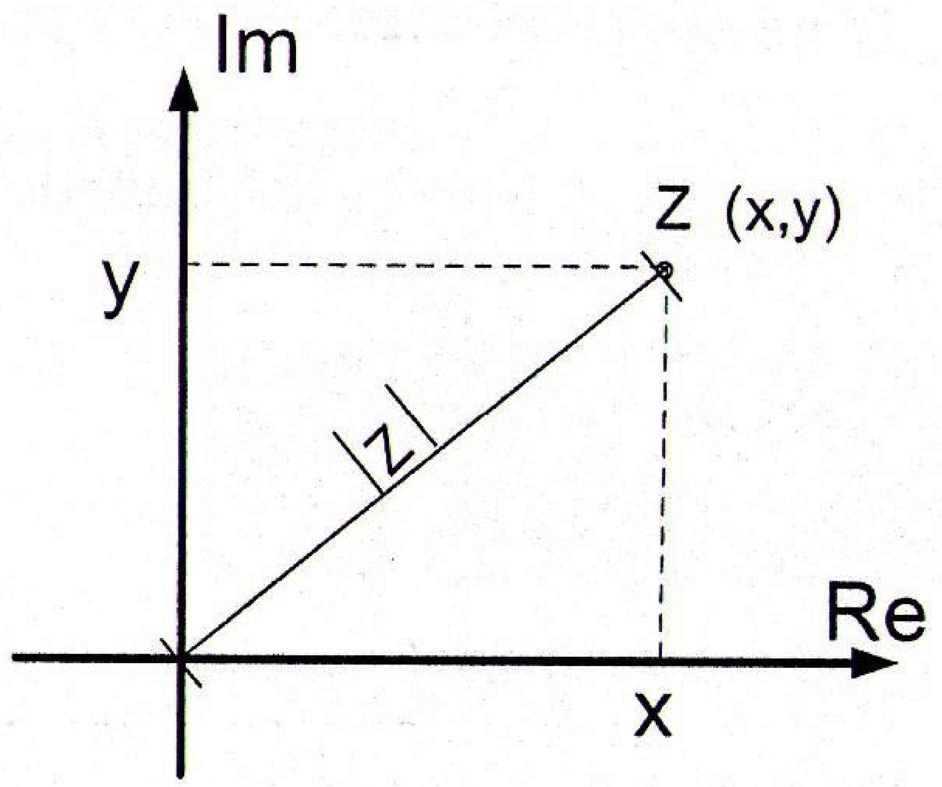


Fig 1.2.1

Note que o um complexo é representado no plano por seu *afixo,* isto é, o ponto que possui como coordenadas: a parte real do complexo (abcissa) e parte imaginária (ordenada).

Módulo do Número Complexo

Definimos *módulo do complexo* (ou *norma do complexo)* como sendo a distância do afixo do mesmo à origem do plano complexo e representamos por: módulo de z = $|z|$.

Com um simples teorema de Pitágoras na figura 1.2.1, temos que:

$$|z| = \sqrt{(\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2}$$

Definição 1.2.2

A representação de números complexos por pares ordenados se assemelha muito a representação de vetores no $\mathbb{R}^2$. Isso nos sugere que o complexo também possa ser visto como sendo um vetor com origem coincidente à origem do plano de Argand-Gauss e com extremidade em seu afixo. Dessa forma, podemos definir o conceito de distância entre dois complexos.

Distância entre Dois Números Complexos

A diferença dos vetores representantes dos complexos z e w, respectivamente nos dá o vetor representante do complexo $z - w$. O módulo desse complexo nos dará a distância entre os afixos de z e de w (vide a representação geométrica da Figura 1.2.2).

$$d(z,w) = |z - w|$$

Definição 1.2.3

OBS: Atentando-se à desigualdade triangular no triângulo ao lado, temos:

$$|z| + |z - w| \geq |w|$$

Ou ainda, fazendo $u = z - w$, sendo z e u dois complexos quaisquer, vale que:

$$|z| + |u| \geq |z + u|$$
$$\forall z, u \in \mathbb{C}$$

Fórmula 1.2.1

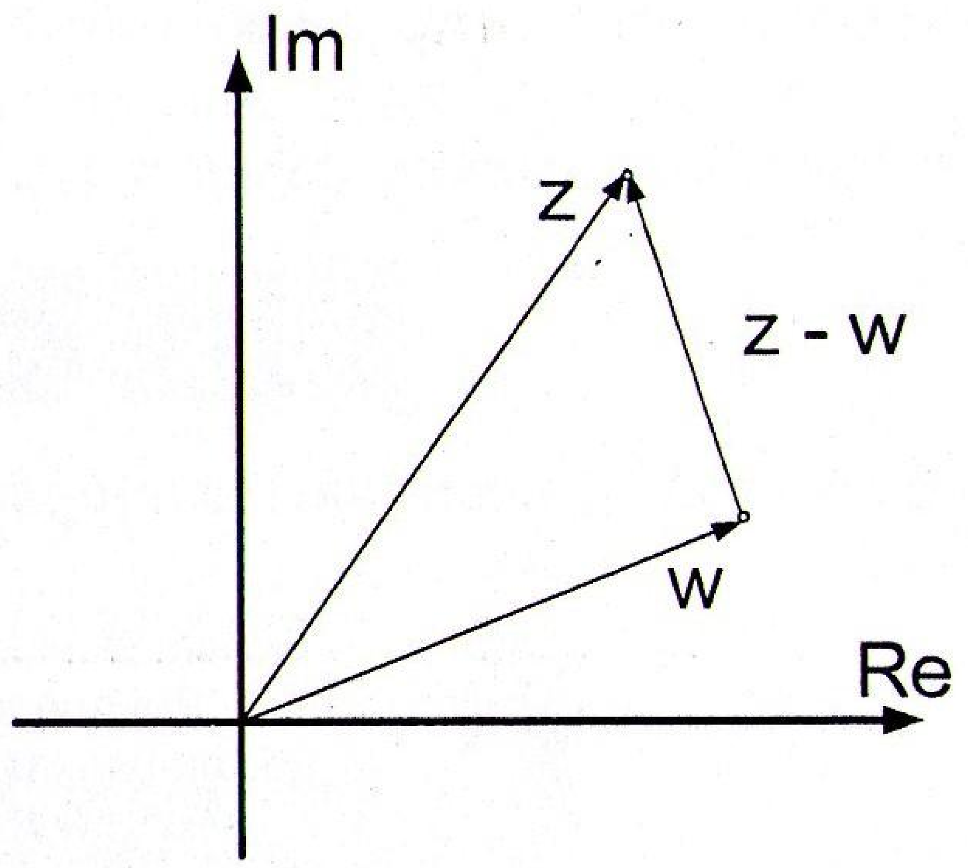


Fig. 1.2.2

Argumento do Número Complexo

O ângulo que o vetor representante do número complexo faz com o eixo real é chamado de argumento de um número complexo e é denotado por arg(z). Sendo arg(z) o menor ângulo positivo que nos dá a abertura entre o vetor representante de z e a reta real, podemos definir o conjunto de argumentos de z como sendo: $A(z) = \arg(z) + 2.k.\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

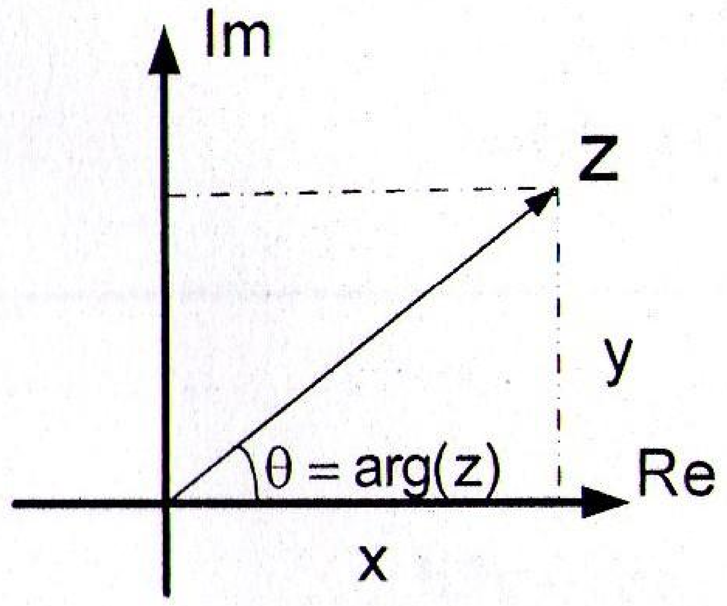


Fig. 1.2.3

Com uma ajuda da trigonometria:

$$\text{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}$$

O que nos leva a:

$$\theta = \arg(z) = \text{Arctg}\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right)$$

Definição 1.2.4

O menor desses ângulos, isto é, arg(z), é dito *argumento principal* do complexo.

O Conjugado de um Complexo

Vamos ver, no decorrer do livro, que ao estudar um complexo z da forma $z = x + y.i$, é muito interessante definir também o complexo:

$$\bar{z} = x - y.i$$ **Definição 1.2.5**

Tal número é chamado de *complexo conjugado de z.*

Autor: *De imediato, percebemos algumas coisas importantes sobre o que definimos. Leia todas a seguir atentamente*

1. Soma do complexo com seu conjugado

$$\bar{z} + z = (x - \cancel{y.i}) + (x + \cancel{y.i}) = 2.x$$

$$\therefore \quad \bar{z} + z = 2.\text{Re}(z)$$

Fórmula 1.2.2

---

2. Produto do complexo por seu conjugado

$$z.\bar{z} = (x + y.i).(x - y.i) = x^2 - \cancel{x.yi} + \cancel{x.yi} - y^2.i^2$$

$$\therefore \quad z.\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Fórmula 1.2.3

3. Conjugado da soma de dois complexos

$$\begin{cases} z = a + b.i \\ w = c + d.i \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\overline{(z + w)} = \overline{(a + b.i + c + d.i)} = (a + c) - (b + d).i =$$
$$= (a - b.i) + (c - d.i) = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{(z + w)} = \bar{z} + \bar{w}$$

Fórmula 1.2.4

A soma dos conjugados é o conjugado da soma.

---

4. Conjugado do produto de dois complexos

$$\begin{cases} z = a + b.i \\ w = c + d.i \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\overline{(z.w)} = \overline{((a + b.i).(c + d.i))} = \overline{((a.c - b.d) + (b.c + a.d).i)}$$
$$= (a.c - bd) - (b.c + a.d).i = a.c - b.c.i - b.d - a.d.i$$
$$= (a - b.i).(c - d.i) = \bar{z}.\bar{w}$$

$$\overline{(z.w)} = \bar{z}.\bar{w}$$

Fórmula 1.2.5

O produto dos conjugados é o conjugado do produto.

5. Conjugado da divisão de dois complexos

$$\begin{cases} z = a + b.i \\ w = c + d.i \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{(a+b.i)}{(c+d.i)}\right)} = \overline{\left(\frac{(a+b.i)}{(c+d.i)}.\frac{(c-d.i)}{(c-d.i)}\right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{(a.c+b.d)+(b.c-a.d).i}{c^2+d^2}\right)} = \left(\frac{(a.c+b.d)-(b.c-a.d).i}{c^2+d^2}\right)$$

$$= \frac{(a-b.i).(c+di)}{(c+d.i).(c-d.i)} = \left(\frac{a-b.i}{c-d.i}\right).\frac{\cancel{(c+d.i)}}{\cancel{(c+d.i)}} = \left(\frac{a-b.i}{c-d.i}\right) = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

$$\boxed{\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}}$$

Fórmula 1.2.6

A divisão dos conjugados é o conjugado da divisão.

Exemplo 1.2a Mostre que são complexos:

$$z = \frac{1}{2+i} \quad e \quad w = \frac{1}{1+i}$$

Em seguida, determine o complexo $u = z - w$ e calcule a distância entre os afixos de z e w.

Solução:

Sabemos da Fórmula 1.2.3 que multiplicar um complexo por seu conjugado nos dá um resultado real.

$$\begin{cases} z = \dfrac{1}{2+i} = \dfrac{1}{2+i}.\dfrac{2-i}{2-i} = \dfrac{2-i}{2^2+1^2} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}.i \\ \\ w = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{1+i}.\dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{1-i}{1^2+1^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}.i \end{cases}$$

Como z e w podem ser escritos na forma $x + y.i$ sabemos então que os mesmos são números complexos. Além disso:

$$u = z - w = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}.i\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.i\right) = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right).i$$

$$= \left(-\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{3}{10}\right).i$$

$$\boxed{u = \left(-\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{3}{10}\right).i}$$

A distância entre os afixos de z e w é dada pelo módulo de u:

$$d(z,w) = |u| = \sqrt{\left(-\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{100}\right) + \left(\frac{9}{100}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)}$$

$$\boxed{d(z,w) = \frac{\sqrt{10}}{10}}$$

Exemplo 1.2b (Lidski) Determine o número de soluções da equação:

$$z^2 + |z| = 0$$

Solução:

Sendo $z = x + y.i \quad x, y \in \mathbb{R}$:

$$(x + y.i)^2 + |x + y.i| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + 2.x.y.i + y^2.\cancel{i^2}^{\,-1}\right) + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2.x.y.i + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)}_{Re} + \underbrace{(2xy)}_{Im}i = 0 + 0.i$$

Da identidade de complexos (Definição 1.2.1), devemos igualar as partes real e imaginária em ambos os lados da equação.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x.y = 0 \\ e \\ x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

Sabemos que $x.y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$, então, continuando na equação:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 0^2 + \sqrt{x^2 + 0^2} = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ 0^2 - y^2 + \sqrt{0^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + |x| = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = |y| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Segue então que a equação tem 3 soluções. São elas:

$$\{0\ ,\ i\ ,\ -i\}$$

1.3 Representação Trigonométrica do Complexo

Uma das formas mais comuns de se ver representado um número complexo é na sua forma trigonométrica. Todo complexo pode ser representado como um vetor no plano complexo de Argand-Gauss, tendo sua parte imaginária marcada no eixo vertical e parte real marcada no eixo horizontal.

Da representação geométrica da figura 1.2.3:

$$\begin{cases} Re(z) = |z|.\cos\theta \\ Im(z) = |z|.\text{sen}\theta \end{cases}$$

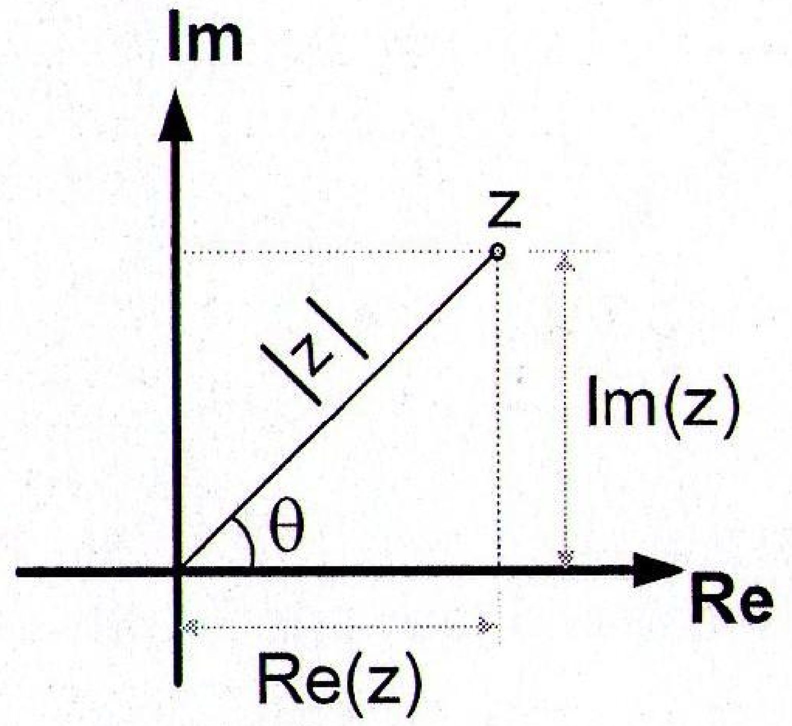


Fig. 1.2.3

Podemos então escrever um complexo z qualquer, de argumento θ como sendo:

$$z = |z|.(\cos\theta + i.\text{sen}\theta)$$

Definição 1.3.1

Notação: É comum denotar $\cos\theta + i.\text{sen}\theta$ pela abreviação $\text{cis}\theta$. Faremos o mesmo deste ponto em diante no livro.

Exemplo 1.3.a Determine a forma trigonométrica do complexo $z = 1 + i$

Solução:

Podemos representar o afixo z no plano complexo de Argand-Gauss. Da geometria do problema na Fig. I, o módulo de z, que corresponde à hipotenusa do triângulo, é determinado pelo Teorema de Pitágoras.

$$|z|^2 = 1^2 + 1^2 \quad \therefore \quad |z| = \sqrt{2}$$

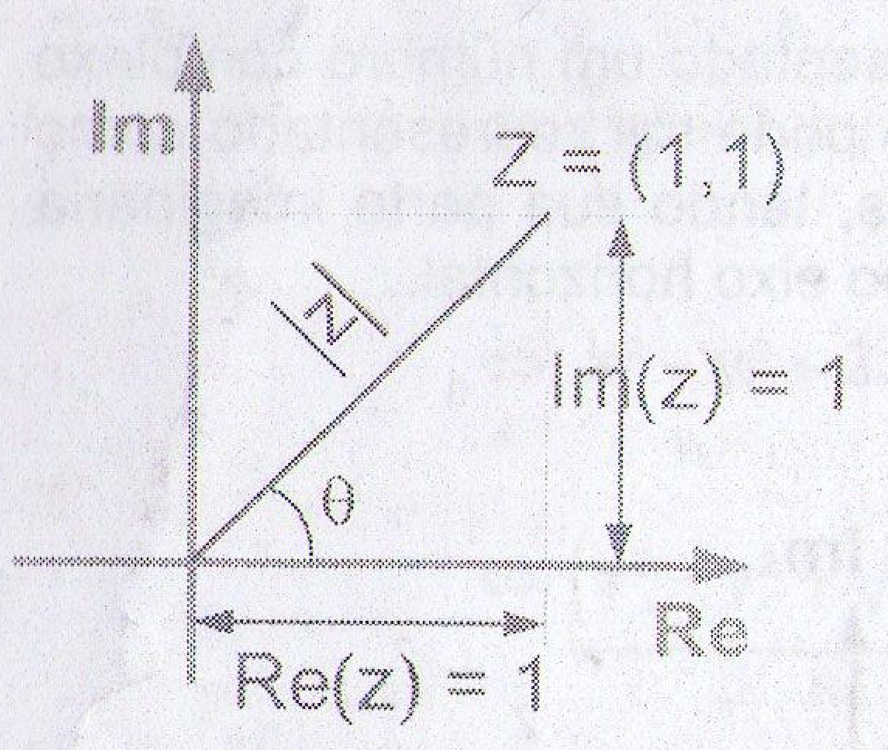


Fig. I

Com uma ajuda de trigonometria básica, podemos achar o valor do argumento do complexo z.

$$\text{tg}\theta = \frac{1}{1} \quad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

Sabendo-se o módulo e o argumento, podemos montar o complexo (Def. 1.3.1)

$$z = 1 + i = \sqrt{2}.\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Exemplo 1.3.b

É possível mostrar duas importantes relações, citadas a seguir:

$$\begin{cases} z = 1 + \text{cis}\theta = 2.\cos\left(\theta/2\right).\text{cis}\left(\theta/2\right) \\ w = 1 - \text{cis}\theta = -2.i.\text{sen}\left(\theta/2\right).\text{cis}\left(\theta/2\right) \end{cases}$$

Solução:

Vamos utilizar três identidades trigonométricas conhecidas (ver Apêndice):

$$\begin{cases} \text{sen}\theta = 2.\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 1 + \cos\theta = 2.\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 1 - \cos\theta = 2.\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

Se você não conhece as relações acima, sugerimos que pesquise a respeito de transformações em arco-metade (trigonometria)!

Analisando primeiro z:

$$z = 1 + \text{cis}\theta = 1 + \cos\theta + i.\text{sen}\theta$$

$$= 2.\cos^2\left(\theta/2\right) + i.2.\text{sen}\left(\theta/2\right).\cos\left(\theta/2\right) = 2.\cos\left(\theta/2\right).\underbrace{\left[\cos\left(\theta/2\right) + i.\text{sen}\left(\theta/2\right)\right]}_{\text{cis}\left(\theta/2\right)}$$

$$\therefore \ z = 2.\cos\left(\theta/2\right).\text{cis}\left(\theta/2\right)$$

Ou seja:

$$z = 1 + \text{cis}\theta = 2.\cos\left(\theta/2\right).\text{cis}\left(\theta/2\right)$$

Fórmula 1.3.1

OBS: O complexo z tem argumento igual à metade de θ e módulo igual a

$$2.\cos\left(\theta/2\right)$$

Fazendo o mesmo com w:

$$w = 1 - \text{cis}\theta = 1 - \cos\theta - i.\text{sen}\theta$$

$$= 2.\text{sen}^2\left(\theta/2\right) - i.2.\text{sen}\left(\theta/2\right).\cos\left(\theta/2\right)$$

$$= 2.\text{sen}\left(\theta/2\right).\left[\text{sen}\left(\theta/2\right) - i.\cos\left(\theta/2\right)\right]$$

Ao contrário do caso anterior, a expressão dentro dos colchetes não é exatamente $\text{cis}(\theta/2)$. Vamos tentar fazer com que se torne algo do tipo.

Multiplicando em cima por –i. i = 1, não alteramos o valor de w:

$$w = 1 - \text{cis}\theta = 2.\text{sen}\left(\theta/2\right).\left[\text{sen}\left(\theta/2\right) - i.\cos\left(\theta/2\right)\right].(-i.i)$$

$$= -2.i.\text{sen}\left(\theta/2\right).(i)\left[\text{sen}\left(\theta/2\right) - i.\cos\left(\theta/2\right)\right]$$

$$= -2.i.\text{sen}\left(\theta/2\right).\underbrace{\left[\cos\left(\theta/2\right) + i.\text{sen}\left(\theta/2\right)\right]}_{\text{cis}\left(\theta/2\right)}$$

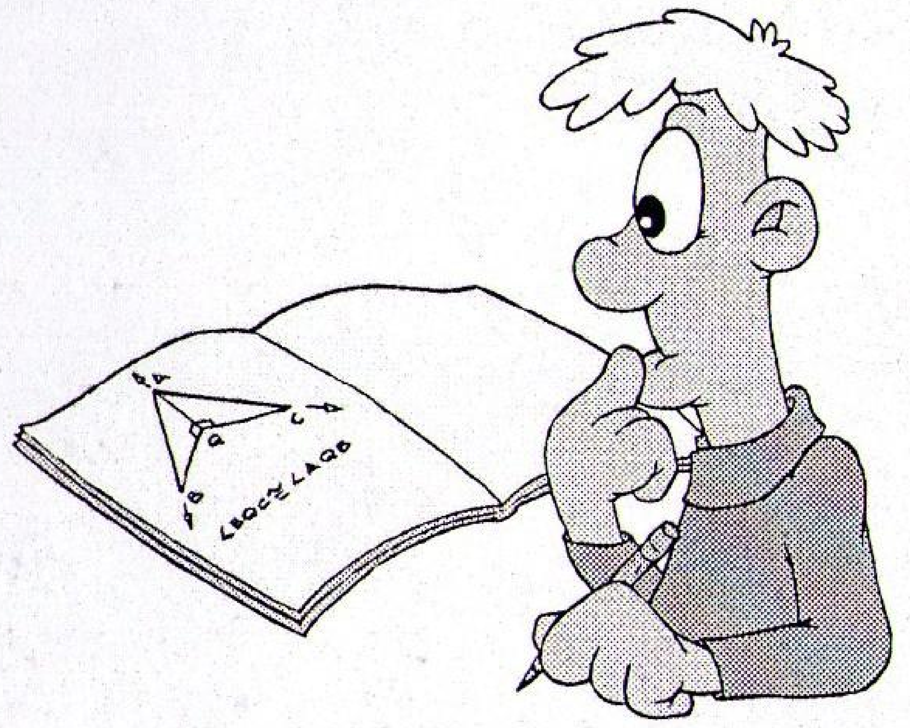
$$= -2.i.\text{sen}\left(\theta/2\right).\left[\text{cis}\left(\theta/2\right)\right]$$

Ou seja:

$$w = 1 - \text{cis}\theta = -2.i.\text{sen}\left(\theta/2\right).\text{cis}\left(\theta/2\right)$$

Fórmula 1.3.2

Expressões tão específicas como essas necessitam ser decoradas? Qual será a utilidade delas?



Autor: *Não é necessário que o aluno decore essas duas expressões mostradas acima, mas é importante saber que é possível representar os complexos z e w na forma trigonométrica, pois isso terá um papel importante na resolução de muitos dos exercícios que veremos ainda. A dedução, uma vez entendida, poderá ser facilmente reproduzida pelo aluno ao ser requisitado que a mesma seja utilizada.*

1.4 Representação Exponencial do Complexo

Eu tenho uma outra idéia de representação para os complexos que facilitará muito a nossa vida quando formos demonstrar algumas relações e propriedades!

Não se assuste com a demonstração. Leia e releia quantas vezes for necessário!

Leonard Euler

Outra forma comum, e muito útil como veremos mais a frente, de se representar um número complexo é usando a sua forma exponencial (forma de Euler):

$$z = |z|.(\cos x + i.\operatorname{sen} x) = |z|.e^{i.x}$$

Fórmula 1.4.1

Demonstração:

Para mostrarmos que todo complexo pode ser escrito na forma exponencial acima, devemos mostrar que, para todo x real, vale:

$$\cos x + i.\operatorname{sen} x = e^{i.x}$$

Para isso, vamos recorrer a um resultado conhecido do Cálculo Diferencial. O Teorema de Taylor diz que funções deriváveis em qualquer ordem num ponto de seu domínio podem ser escritas na forma de um polinômio com grau infinito em torno desse ponto (também chamados de Séries Infinitas).

$$\cos x = A_0 + A_1.x + A_2.x^2 + A_3.x^3 + \ldots$$
$$\operatorname{sen} x = B_0 + B_1.x + B_2.x^2 + B_3.x^3 + \ldots$$
$$e^x = C_0 + C_1.x + C_2.x^2 + C_3.x^3 + \ldots$$

Vamos tentar descobrir os coeficientes desses polinômios. Faremos como exemplo a série infinita de $\cos x$.

$$\cos x = A_0 + A_1.x + A_2.x^2 + A_3.x^3 + \ldots$$

A expressão deve ser válida para qualquer x. Fazendo $x = 0$

$$\cos 0 = A_0 + A_1.0 + A_2.0^2 + A_3.0^3 + \ldots \Rightarrow A_0 = 1$$

Derivando a Série de Taylor de $\cos x$ em relação a x:

$$-\operatorname{sen} x = A_1 + 2.A_2.x + 3.A_3.x^2 + 4A_4.x^3 + \ldots$$

Novamente a expressão deve ser válida para todo x. Fazendo $x = 0$

$$-\operatorname{sen} 0 = A_1 + 2.A_2.0 + 3.A_3.0^2 + 4A_4.0^3 + \ldots \Rightarrow A_1 = 0$$

Derivando novamente a Série de Taylor em relação a x:

$$-\cos x = 2.A_2 + (3.2.)A_3.x + (4.3)A_4.x^2 + \dots$$

Fazendo $x = 0$:

$$-\cos 0 = 2.A_2 + (3.2.)A_3.0 + (4.3)A_4.0^2 + \dots \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{2}$$

Procedendo desta maneira infinitamente, é fácil ver que a série infinita para $\cos x$ fica:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \dots$$

Deixamos como **exercício** que o leitor demonstre, de maneira análoga, a representação em série das outras duas funções:

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + - \dots$$

A partir desses resultados podemos escrever:

$$\begin{cases} \cos x + i.\text{sen}\, x = 1 + i.x - \frac{x^2}{2!} - i.\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i.\frac{x^5}{5!} - + \dots \\ e^{ix} = 1 + i.x - \frac{x^2}{2!} - i.\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i.\frac{x^5}{5!} - + \dots \end{cases}$$

Como as duas funções são idênticas, chegamos ao nosso resultado de que:

$$\cos x + i.\text{sen}\, x = e^{i.x}$$

OBS Importante: *Muitos livros didáticos diferem do ponto de partida definição da função exponencial. Muitos usam o resultado da demonstraç que acabamos de fazer como sendo a definição formal da funç exponencial. No nosso caso, consideraremos que a função exponencial definida de uma forma independente bem como foi feita a análise de su propriedades específicas.*

Autor: *Quase isso. Foi mencionado que os números complexos tê propriedades similares a exponenciais. Isso ficou claro com a dedução expressão de Euler. Será que as funções seno e cosseno (que compõe números complexos) se relacionam de alguma forma com exponenciais?*

Vamos demonstrar que sim! Basta lembrar que (se você não enxer imediatamente, tente demonstrar!):

$$\begin{cases} \text{cis}(x) + \text{cis}(-x) = 2.\cos(x) \\ \text{cis}(x) - \text{cis}(-x) = 2.i.\text{sen}(x) \end{cases}$$

Seguem, então, duas importantes propriedades da forma de Euler do núme complexo.

$$\frac{e^{i.x} + e^{-i.x}}{2} = \cos x$$
$$\frac{e^{i.x} - e^{-i.x}}{2i} = \text{sen}\, x \quad , \forall x \in \Re$$

Fórmula 1.4.2

Vejamos a seguir exemplos de aplicação dessa forma de representação de complexos.

Exemplo 1.4.a (IME 2003)
Seja z um complexo de módulo unitário e n um número natural. Mostre que é real o complexo w dado por:

$$w = \frac{z^n}{1+z^{2n}}$$

Solução:
Sabendo que o complexo tem módulo unitário, podemos escrevê-lo na forma exponencial:

$$z = e^{i\theta}$$

$$\therefore \quad w = \frac{e^{i\theta n}}{1+e^{2i\theta n}} = \frac{1}{\left(\dfrac{1+e^{2i\theta n}}{e^{i\theta n}}\right)}$$

Usando o resultado da fórmula 1.4.2:

$$w = \frac{1}{\left(e^{-i\theta n}+e^{i\theta n}\right)} = \frac{1}{2\cos(n\theta)} \in \mathbb{R}$$

Portanto o complexo w é real.

Exemplo 1.4.b
Sabendo que um complexo z pode ser expresso em sua forma exponencial de Euler, demonstre as seguintes identidades trigonométricas:

$$\begin{cases} \cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b = \cos(a+b) \\ \operatorname{sen} a.\cos b + \operatorname{sen} b.\cos a = \operatorname{sen}(a+b) \end{cases}$$

Solução:
Tome o produto de dois complexos de argumentos a e b, nas formas trigonométrica e exponencial:

$$(\operatorname{cis} a).(\operatorname{cis} b) = e^{i.a}.e^{i.b}$$

$$\Rightarrow (\cos a + i.\operatorname{sen} a).(\cos b + i.\operatorname{sen} b) = e^{i.(a+b)}$$

$$\Rightarrow (\cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b) + i.(\operatorname{sen} a.\cos b + \operatorname{sen} b.\cos a) = \operatorname{cis}(a+b)$$

Da identidade dos complexos (Definição 1.2.1), segue que:

$$\begin{cases} \cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b = \operatorname{Re}(\operatorname{cis}(a+b)) = \cos(a+b) \\ \operatorname{sen} a.\cos b + \operatorname{sen} b.\cos a = \operatorname{Im}(\operatorname{cis}(a+b)) = \operatorname{sen}(a+b) \end{cases}$$

1.5 Propriedades Importantes dos Complexos

Agora que conhecemos as diversas formas de representação de um número complexo, poderemos partir para demonstrar mais algumas importantes propriedades. Veremos a seguir na prática o que já foi mencionado: a representação exponencial é muito útil, pois dará aos números complexos características semelhantes às das funções exponenciais na hora da multiplicação e da potenciação.

Multiplicação de dois números complexos:

$$\begin{cases} z = r.\operatorname{cis} x \\ w = s.\operatorname{cis} y \end{cases} \Rightarrow \quad z.w = (r.s).\operatorname{cis}(x+y)$$

Fórmula 1.5.1

Demonstração:
Usemos a forma exponencial:

$$z.w = \left(r.e^{ix}\right).\left(s.e^{iy}\right) = (r.s).e^{i(x+y)} = (r.s).\operatorname{cis}(x+y)$$

Divisão de dois números complexos:

$$\begin{cases} z = r.\operatorname{cis} x \\ w = s.\operatorname{cis} y \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{z}{w} = \left(\frac{r}{s}\right).\operatorname{cis}(x-y)$$

Fórmula 1.5.2

Demonstração:
Novamente, usemos a forma exponencial:

$$\frac{z}{w} = \frac{\left(r.e^{ix}\right)}{\left(s.e^{iy}\right)} = \left(\frac{r}{s}\right).e^{i(x-y)} = \left(\frac{r}{s}\right).cis\left(x-y\right)$$

Potência de Números Complexos:

$$\begin{cases} z = r.cisx \\ n \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow z^n = r^n.cis\left(n.x\right)$$

Fórmula 1.5.3

OBS: *Essa propriedade é conhecida como* ***Lei de De Moivre*** *(em homenagem ao matemático francês Abraham De Moivre que primeiro estudou essa relação mostrada acima).*

Demonstração: Novamente, usemos a forma exponencial:

$$z^n = \left(r.e^{ix}\right)^n = r^n.e^{inx} = r^n.cis\left(n.x\right)$$

A expressão é muito útil ao tratarmos de potências de números complexos, pois enfatiza as propriedades similares às de exponenciais que possuem os números complexos. Veremos mais a frente que ela será usada muito em somatórios de complexos (capítulo 3)

Abraham De Moivre

Propriedades de Módulos de Números Complexos:

$$|z.w| = |z|.|w|$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

Fórmula 1.5.4

Demonstração:
A demonstração segue direto das demonstrações anteriores.

Produto do complexo por seu conjugado:

$$z.\bar{z} = |z|^2$$

Fórmula 1.5.5

OBS: *Essa propriedade é de grande importância (já foi vista uma vez anteriormente: Fórmula 1.2.3), pois resolverá muitos exercícios que encontraremos pela frente.*

Demonstração:

$$z = r.cis\left(x\right) \Rightarrow \bar{z} = r.cis\left(-x\right)$$

$$\Rightarrow z.\bar{z} = r^2.cis\left(-x\right).cis\left(x\right) = r^2.cis\underbrace{\left(-x+x\right)}_{=0}$$

$$\Rightarrow z.\bar{z} = r^2 = |z|^2$$

Identidade de Complexos

$$\begin{cases} z = r.cis\theta \\ w = s.cis\alpha \end{cases} \quad r,s > 0$$

$$z = w \Leftrightarrow r.cis\theta = s.cis\alpha$$

$$\Leftrightarrow r.\cos\theta + r.i.sen\theta = s.\cos\alpha + s.i.sen\alpha$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r.\cos\theta = s.\cos\alpha \\ r.sen\theta = s.sen\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = s \\ \theta = \alpha + 2.k.\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z = w \iff \begin{cases} r = s \\ \theta = \alpha + 2.k.\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Formula 1.5.6

Radiciação de Complexos

Trata-se do processo de extração de raízes de complexos.

$$\begin{cases} z = r.\text{cis}\theta \\ w = s.\text{cis}\alpha \end{cases} \quad r,s > 0 \qquad z^n = w$$

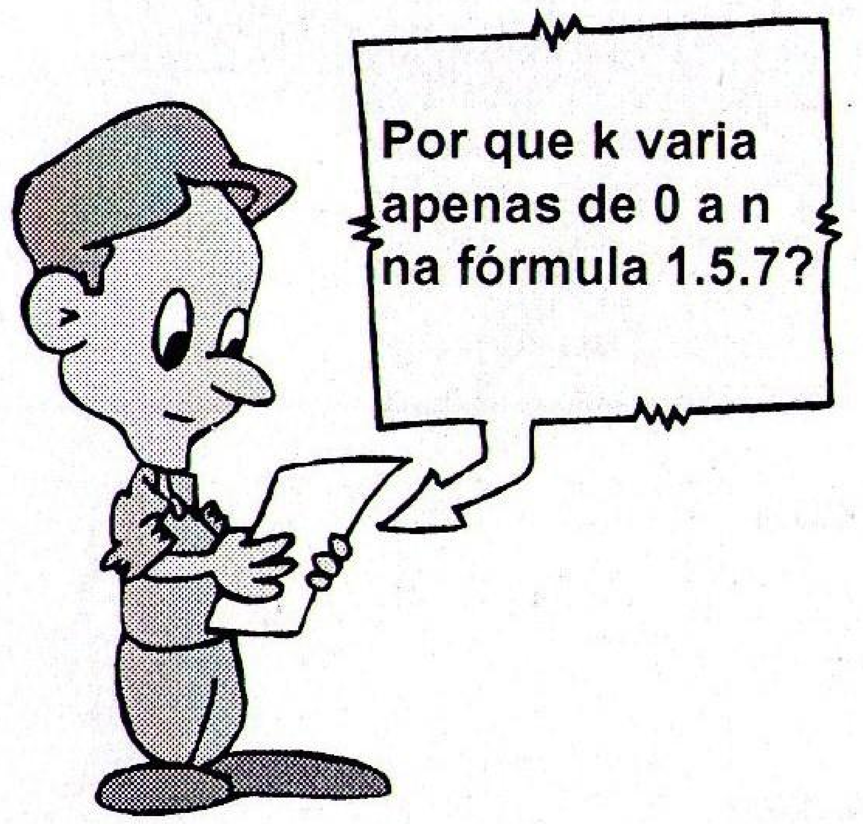
$$z^n = w \iff r^n.\text{cis}(n.\theta) = s.\text{cis}\alpha$$

$$\iff \begin{cases} r^n = s \\ n.\theta = \alpha + 2.k.\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r = \sqrt[n]{s} \\ \theta = \dfrac{\alpha + 2.k.\pi}{n} \end{cases} \quad 0 \le k < n\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

$$z^n = s.\text{cis}\alpha \iff z = \sqrt[n]{s}.\text{cis}\left(\frac{\alpha + 2.k.\pi}{n}\right) \quad 0 \le k < n\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

Formula 1.5.7



Autor: *Restringimos que k esteja entre 0 e n, pois qualquer valor maior que esse de k corresponderá a valores repetidos para z.*

Exemplo 1.5 a (ITA/IME CG) Sejam os números complexos distintos z e w, (onde z tem módulo unitário). Mostre que:

$$\left|\frac{z - w}{1 - z.\overline{w}}\right| = 1$$

Solução:

Autor: *Antes de tudo, devemos ter calma! Ao provarmos uma igualdade devemos sempre tentar atacar pelo lado mais 'feio' (ou 'monstruoso') e tentar chegar ao outro lado da igualdade. A única informação que temos do enunciado é a respeito do módulo de z. Vamos tentar atacar o problema com tudo que já aprendemos sobre módulos de números complexos.*

Vamos utilizar nessa questão grande parte das propriedades vistas até o momento. Sugerimos que o leitor tente identificar exatamente qual propriedade foi utilizada em cada passo da solução:

$$\left|\frac{z - w}{1 - z.\overline{w}}\right| = \frac{|z - w|}{|1 - z.\overline{w}|}.\frac{|\overline{z}|}{|\overline{z}|} = \frac{|z - w|.|\overline{z}|}{|(1 - z.\overline{w}).\overline{z}|} =$$

$$= \frac{|z - w|.|\overline{z}|}{|\overline{z} - \overline{w}.(\overline{z}.z)|} = \frac{|z - w|.|\overline{z}|}{|\overline{z} - \overline{w}.(|z|^2)|}$$

Lembrando que $|\overline{z}| = |z| = 1$:

$$\left|\frac{z - w}{1 - z.\overline{w}}\right| = \frac{|z - w|}{|\overline{z} - \overline{w}|} = \frac{|z - w|}{\left|\overline{(z - w)}\right|} = \frac{|z - w|}{|z - w|} = 1$$

Viu? Não foi tão monstruoso assim!

Exemplo 1.5 b Resolva novamente o Exemplo 1.2b utilizando a forma trigonométrica para o complexo: Determine as soluções para a equação:

$$z^2 + |z| = 0$$

Solução:

Os resultados das duas soluções devem ser coerentes, obviamente. Portanto o intuito desse exemplo é só de mostrar outra saída para o mesmo problema já resolvido.

$$z = |z|.\text{cis}\theta \overset{\text{De Moivre}}{\Rightarrow} z^2 = |z|^2.\text{cis}(2\theta)$$

Substituindo na equação:

$$z^2 + |z| = 0 \Leftrightarrow |z|^2.\text{cis}(2\theta) + |z| = 0$$
$$\Leftrightarrow |z|.(|z|\text{cis}(2\theta) + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 0 \\ \text{ou} \\ |z|\text{cis}(2\theta) = -1 = \text{cis}\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} \quad z = 0 \\ \text{ou} \\ \text{(ii)} \quad |z|.\text{cis}(2\theta) = -1 = \text{cis}\pi \end{cases}$$

No caso (i) temos a solução z = 0. Para o caso (ii), usando a expressão de identidade de complexos (Fórmula 1.5.6):

$$|z|.\text{cis}(2\theta) = \text{cis}\pi \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ 2\theta = \pi + 2.k.\pi, \quad k = 0,1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} + k.\pi, \quad k = 0,1 \end{cases}$$

Portanto as soluções são: $\boxed{0, i, -i}$

Exemplo 1.5c (IME) Mostre que a seguinte expressão representa um complexo (ou mais de um), e escreva-o(s) na forma x + y.i

$$\frac{1}{\sqrt{7 + 24.i}}$$

Solução:

Vimos que a radiciação de um complexo gera mais de um complexo (Fórmula 1.5.7), i.e., podemos ter mais de uma raiz quadrada de um dado complexo.

$$\sqrt{7 + 24.i} = a + b.i \Leftrightarrow 7 + 24.i = (a + b.i)^2 = a^2 - b^2 + 2.a.b.i$$

$$\overset{\text{Identidade}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ 2.a.b = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ b = 12/a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - \frac{144}{a^2} = 7$$
$$\Leftrightarrow a^4 - 7.a^2 - 144 = 0$$

Como 'a' é real, devemos ter como única solução dessa equação do segundo grau em a^2 a solução positiva:

$$a^2 = \frac{7 + 25}{2} \Rightarrow a = \pm 4$$

Como a.b = 12, temos: $\sqrt{7 + 24.i} = \begin{cases} 4 + 3.i \\ -4 - 3.i \end{cases}$

De onde segue:

$$\frac{1}{\sqrt{7 + 24.i}} = \pm\frac{1}{4 + 3.i} = \pm\frac{4 - 3.i}{(4 + 3.i).(4 - 3.i)} = \pm\frac{4 - 3.i}{25}$$

$$\frac{1}{\sqrt{7 + 24.i}} = \pm\frac{4 - 3.i}{25} \in \mathbb{C}$$

Mostraremos a seguir uma **Segunda Solução** para o mesmo problema.

2ª Solução:
No ensino médio é comum os alunos aprenderem (ao estudarem fatoração em geral) a expressão conhecida como "Expressão do Radical Duplo".

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \pm\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right)$$

A demonstração dessa expressão é simples e deixamos para que o leitor a faça como **exercício** (Basta elevar o membro à direita ao quadrado para concluirmos a prova). O sinal negativo para o membro direito veio do fato de que estamos trabalhando com complexos, e a radiciação pode sim levar a um resultado negativo. Vamos utilizar esse resultado na solução da questão proposta.

$$\sqrt{7+24.i} = \sqrt{7+24\sqrt{-1}} = \sqrt{7+\sqrt{-576}}$$

Utilizando a "Expressão do Radical Duplo":

$$\sqrt{7+24.i} = \sqrt{7+\sqrt{-576}} = \pm\left(\sqrt{\frac{7+\sqrt{49+576}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{49+576}}{2}}\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{7+\sqrt{625}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{625}}{2}}\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{7+25}{2}}+\sqrt{\frac{7-25}{2}}\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{16}+\sqrt{-9}\right)$$

$$= \pm\,(4+3.i)$$

A partir daí, a solução é análoga à Solução 1 e obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{7+24.i}} = \pm\frac{4-3.i}{25} \in \mathbb{C}$$

1.6 Raízes N-Ésimas da Unidade

Dizemos que um número z é uma raiz n-ésima da unidade quando ele é tal que:

$$z^n = 1$$

Usando o resultado da *Fórmula 1.5.7*, temos que todas as raízes n-ésimas da unidade são do tipo:

$$z = \text{cis}\left(\frac{2.k.\pi}{n}\right) \quad k = 0,1,\ldots,n-1$$

Fórmula 1.6.1

Da teoria dos polinômios (que será estudada nos capítulos mais a frente), sabe-se que todo polinômio pode ser fatorado, se soubermos todas as suas raízes, da seguinte forma:

$$P(x) = a.(x-\alpha).(x-\beta)\ldots.$$

Onde $\alpha,\beta,\ldots$ são as raízes do polinômio conhecidas e a é o coeficiente do termo de maior grau do polinômio.

Ora, mas da *Formula 1.6.1*, sabemos todas as raízes da unidade. Isto é, podemos fatorar o polinômio z^n-1:

$$z^n-1 = (z-1).\left(z-\text{cis}\frac{2\pi}{n}\right).\left(z-\text{cis}\frac{4\pi}{n}\right)\ldots\left(z-\text{cis}\frac{2.(n-1)\pi}{n}\right) \quad \textbf{(Eq I)}$$

Guarde esse resultado!! Vamos relembrar um pouco de somas de Progressões Geométricas finitas? Para a soma dos n primeiros termos de P.G. com primeiro termo 'a' e razão q, vale a expressão:

$$a + a.q + a.q^2 + \ldots + a.q^{n-1} = \frac{a.(q^n-1)}{q-1}$$

Considerando a soma dos n primeiros termos da PG de primeiro termo unitário e razão z:

$$1+z+z^2+\ldots+z^{n-1} = \frac{z^n-1}{z-1}$$

$$\therefore\ z^n-1 = (z-1).(1+z+z^2+\ldots+z^{n-1})$$

(Eq II)

Dos últimos dois resultados (Eq I e Eq II), por comparação, segue:

$$\left(z-\text{cis}\frac{2\pi}{n}\right).\left(z-\text{cis}\frac{4\pi}{n}\right)....\left(z-\text{cis}\frac{2.(n-1)\pi}{n}\right)=1+z+z^2+...+z^{n-1}$$

Fórmula 1.6.2

Podemos, ainda, escrever esse resultado na forma exponencial:

$$\left(z-e^{i.\frac{2\pi}{n}}\right).\left(z-e^{i.\frac{4\pi}{n}}\right)....\left(z-e^{i.\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right)=1+z+z^2+...+z^{n-1}$$

Fórmula 1.6.3

Além disso, vale ressaltar que se w é uma raiz n-ésima da unidade, diferente de 1, então:

$$1+w+w^2+...+w^{n-1}=0$$

Fórmula 1.6.4

Note que 1, w , w², ... são justamente as raízes da unidade! A soma delas é a soma das raízes da equação:

$$z^n-1=0$$

As relações de Girard (que veremos nos capítulos de polinômios) garantem que **a soma das raízes dessa equação é nula.** Se você nunca estudou polinômios, ou não tem familiaridade com essas relações, pedimos que acredite no resultado, que será provado na seção de Polinômios.

Autor: *Por enquanto o assunto parece não servir para muita coisa, a menos que a questão cobre especificamente as propriedades das raízes n-ésimas da unidade. Guarde a ansiedade para o capítulo 2 no qual usaremos e muito as tais raízes da unidade para resolver problemas interessantíssimos de geometria!*

1.7 Exercícios de Fixação

Exercício 1.1 Para que valores de n natural será real o número:

$$z=i.\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$$

Exercício 1.2 Determine o valor de θ para que o complexo

$$\frac{i-1}{\text{tg}\theta+i}$$

esteja sobre a bissetriz do primeiro quadrante do plano de Argand-Gauss.

Exercício 1.3 Mostre que se $z=x+y.i$ pertence à circunferência de raio unitário centrada na origem do plano complexo, com exceção do complexo -1 então z pode ser escrito na forma:

$$z=\frac{1+x+y.i}{1+x-y.i}$$

Exercício 1.4 (IME - 1983) Prove que se $P(x)=x^2+(a+b.i)x+(c+d.i)$ onde a,b,c,d são reais não-nulos, admite uma raiz real, então $abd=d^2+b^2c$

Exercício 1.5 Mostre que todo complexo de módulo unitário e com parte real diferente de 1 pode ser escrito na forma abaixo, sendo k é um número real arbitrário.

$$\frac{k+i}{k-i}$$

Exercício 1.6 Mostre que as raízes n-ésimas da unidade estão em progressão geométrica, e determine a razão dessa P.G.

Exercício 1.7 Determine os complexos que satisfazem à seguinte equação:

$$z^5 = -\bar{z}$$

Exercício 1.8 Resolva novamente o exemplo 1.4ª, desta vez usando o resultado já mostrado:

$$1+\text{cis}\theta = 2.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\text{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Exercício 1.9 Mostre que o seguinte produtório é real:

$$\left(z+\bar{z}\right)\left(z^3.\bar{z}^3\right)\left(z^5+\bar{z}^5\right)\left(z^7.\bar{z}^7\right)$$

Exercício 1.10 (IME - 1983) Seja $S_n = \sum_{1}^{n} a_n$ onde os a_n são complexos.

Os módulos dos a_n estão em P.G. e os seus argumentos em P.A. Calcule o limite da soma S_n quando n tende a infinito. São dados:

$$a_1 = \frac{27}{2}.\left(\sqrt{3}+i\right) \quad \text{e} \quad a_4 = \frac{\left(i.\sqrt{3}-1\right)}{2},$$

Exercício 1.11 (IME - 1977) Seja o conjunto: $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Determine a imagem de A pela função g, complexa de variável complexa tal que: $g(z) = (4+3i)z + 5 - i$.

Exercício 1.12 (IME, ITA) Mostre que todas as raízes da equação: $(z+1)^5 + z^5 = 0$ pertencem a uma mesma reta paralela ao eixo imaginário no plano complexo.

Exercício 1.13 (IME - 2003) Sendo a, b e c números naturais em progressão aritmética e z um número complexo de módulo unitário, determine um conjunto de valores para a,b,c,z de forma que eles satisfaçam a igualdade:

$$\frac{1}{z^a}+\frac{1}{z^b}+\frac{1}{z^c}=\frac{1}{z^9}$$

Exercício 1.14 (IME - 1982 adaptada) Sabendo que $x^{-1}+x = 2.\cos\theta$, mostre que é real a seguinte expressão, e a calcule, em função de θ:

$$x^{-2008}+x^{2008}$$

Exercício 1.15 (OBM-U) Determine todos os valores inteiros positivos de *m* para os quais o polinômio $(x+1)^m + x^m + 1$ é divisível por (x^2+x+1).

Sugestão: Um polinômio P(x) é divisível por Q(x) quando todas as raízes de Q forem raízes de P.

Exercício 1.16 (ITA - 2003) Seja z pertencente aos complexos. Calcule a soma das raízes $z^3 + z^2 - |z|^2 + 2z = 0$.

Exercício 1.17 (ITA - 2000) O número complexo z a seguir possui argumento igual a 45°. Determine o valor de a.

$$z = \frac{1-\cos a}{\text{sen}a.\cos a} + i.\frac{1-2\cos a + 2.\text{sen}a}{\text{sen}2a} \quad ; \; a \in \left(0, \pi/2\right)$$

Exercício 1.18 Mostre que: $\text{Re}\left(\frac{|z|-i.z}{|z|+i.z}\right) = 0$ para qualquer z complexo.

Exercício 1.19 (ITA - 2002) Seja z complexo. Das seguintes informações, julgue quais são as verdadeiras.

I- Se $w = \frac{2iz^2+5\bar{z}-i}{1+3.\bar{z}^2+2iz+3|z|^2+2|z|} \Rightarrow \bar{w} = \frac{-2i\bar{z}^2+5z+i}{1+3.z^2-2i\bar{z}+3|\bar{z}|^2+2|z|}$

II- Se $z \neq 0$ e $w = \frac{2iz+3i+3}{(1+2i)z}$, então $|w| \leq \frac{2|z|+3.\sqrt{2}}{|z|\sqrt{5}}$

III- Se $w = \frac{(1+i)z^2}{4\sqrt{3}+4i}$, então $2\arg z + \frac{\pi}{12}$ é um $\arg(w)$

a) Todas b) apenas I e II c) apenas II e III
d) apenas I e III e) apenas II

Exercício 1.20 (ITA - 2002) Das seguintes informações a respeito da equação $1+z+z^2+z^3+z^4=0$, julgue quais são as verdadeiras.

I. A equação possui pelo menos um par de raízes reais.
II. A equação possui duas raízes de módulo 1, uma raiz de módulo menor que 1 e uma raiz de módulo maior que 1.
III. Se n é um natural não nulo, e r é uma raiz dessa equação, então:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{r}{3}\right|^k < \frac{1}{2}$$

a) Nenhuma
b) apenas I
c) apenas II
d) apenas III
e) apenas I e III

Exercício 1.21 (ITA - 1994 adaptada) Seja z um complexo satisfazendo $\mathrm{Re}(z)>0$ e $(z+i)^2+|\bar{z}+i|^2=6$. Determine o menor n natural para que z^n é um imaginário puro.

Exercício 1.22 Sendo w uma raiz n-ésima da unidade diferente de 1, mostre que: $1+2w+3w^2+4w^3+...+n.w^{n-1}=\dfrac{n}{w-1}$

Exercício 1.23 Mostre que se um polinômio de coeficientes reais de grau n possui uma raiz complexa, então o conjugado dessa raiz também será raiz do polinômio.

Exercício 1.24 Determine o lugar geométrico do conjunto das imagens no plano complexo do conjunto de complexos z tais que:

$$z(t)=2+4.e^{it}, \quad t\in[0,2\pi]$$

Determine também o módulo do complexo de módulo máximo dentro do conjunto imagem dos complexos definidos acima.

Exercício 1.25 Mostre como poderíamos obter um valor numérico para o numero complexo: $i^{\,i}$

Exercício 1.26 (Spiegel) Sendo $z=\mathrm{cis}\theta$, determine o valor de $\arg\left(e^{i.z}\right)$

Exercício 1.27 (ITA – 1991 adaptada) Sendo $2.\mathrm{cis}\left(\pi/20\right)$ uma raiz quíntupla de w. Determine as raízes da equação:

$$z^4-2.z^2+\frac{w-16i\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}=0$$

Exercício 1.28 (ITA - 1990 adaptada) Mostre que para todo z complexo de modulo unitário vale:

$$\frac{1+z}{1-z}=i.\mathrm{ctg}\left(\frac{\arg(z)}{2}\right)$$

Exercício 1.29 Mostre que, pra todo z complexo não nulo, é real puro:

$$\frac{z}{|z|^2+z^2}$$

Exercício 1.30 (ITA – 2005 adaptada) Se pra todo z complexo, temos: $|f(z)|=|z|$ e $|f(z)-f(1)|=|z-1|$, então mostre que, nesse caso, pra todo complexo z valerá:

$$\overline{f(1)}.f(z)+f(1).\overline{f(z)}=2.\mathrm{Re}(z)$$

Exercício 1.31 (ITA – 2005 adaptada) Se $0\le\alpha<2\pi$ é o argumento de um número complexo z, não nulo, e n é um natural tal que: $(z/|z|)^n=i.\mathrm{sen}(n\alpha)$ então mostre que $2n\alpha-\pi$ é múltiplo de 2π.

Exercício 1.32 Calcule, da forma mais simples, para w sendo uma raiz cúbica da unidade, diferente de 1, a soma:

$$w^{2k}+w^k+1 \quad , k\in\mathbb{Z}$$

Exercício 1.33 (IME – 2006) Considere o sistema:

$$\begin{cases} w^2-z^2=4+12.i \\ \bar{z}-\bar{w}=2+4i \end{cases}, \quad z,w\in\mathbb{C}$$

Calcule o valor de z + w.

Exercício 1.34 (IME – 1981 adaptada)

Mostre que pra todo n natural teremos $(2+i)^n\neq(2-i)^n$

Capítulo 2 – Números Complexos Geometria e os Complexos

Neste capítulo apresentaremos a importante relação entre o estudo dos números complexos e questões de geometria. Obviamente, mesmo dominando o conteúdo desse capítulo e resolvendo todos os respectivos exercícios não significará que todos os seus problemas acabaram.

A geometria é, não só um dos ramos mais bonitos da matemática, como também um dos mais difíceis. Por essa razão devemos ter em mente que as questões que serão resolvidas com o auxílio dos números complexos são bastante específicas, e cabe ao aluno saber quando usar essa ferramenta na resolução de um exercício. Para que essa capacidade de distinguir quando ou não usar essa ferramenta se torne mais acentuada, propomos que o leitor dedique sua atenção à leitura desse capítulo. Vamos começar o capítulo exemplificando que os complexos e a geometria caminham lado a lado.

Exemplo: Vamos mostrar, usando um argumento geométrico, a relação já provada analiticamente no capítulo 1 (Exemplo 1.3b).

$$1+\text{cis}\theta = 2.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\text{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Representação do circulo unitário no plano complexo:

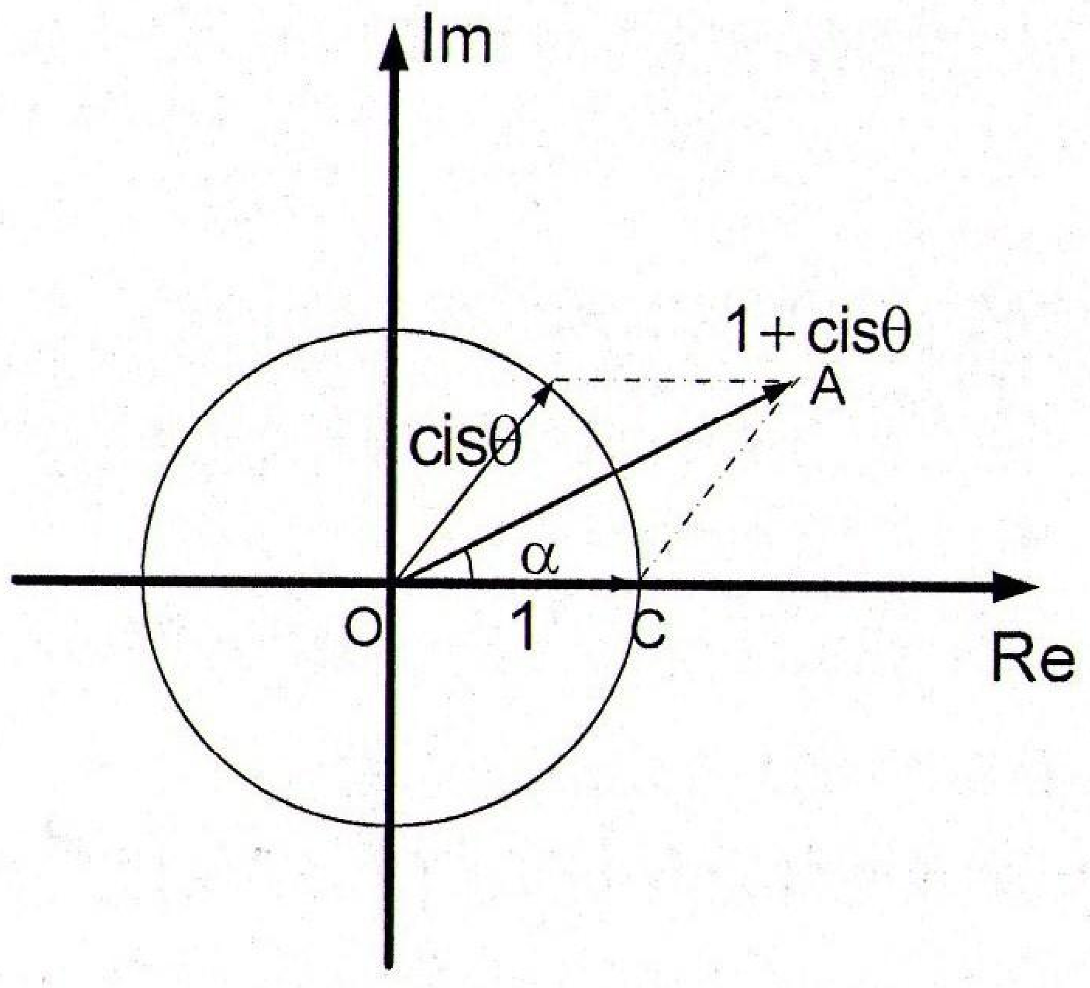


Fig. 1

Vamos ampliar o desenho para fazer algumas observações:

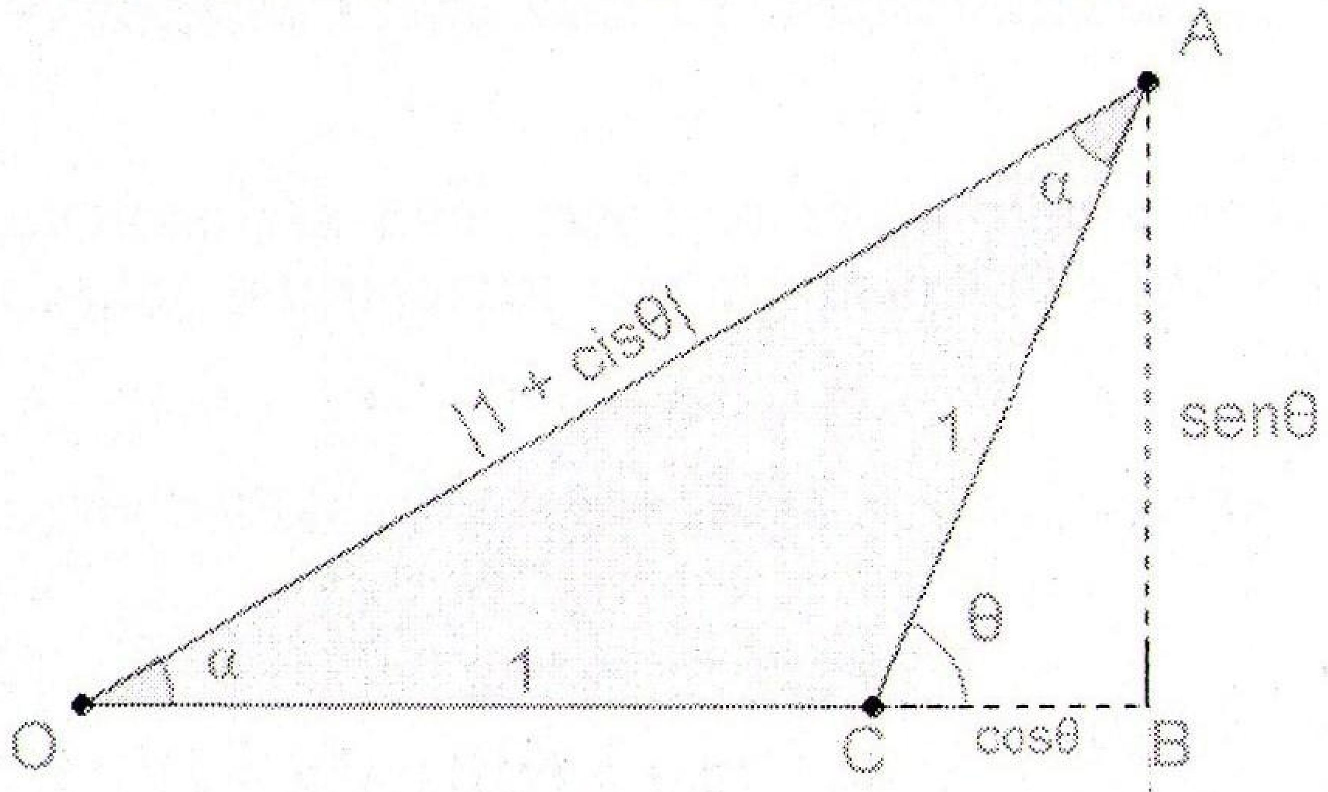


Fig. 2

Note que o triângulo destacado é um triângulo isósceles, cujos lados iguais são iguais ao raio unitário do circulo. Além disso:

$$2\alpha = \theta$$

(ângulo externo)

Podemos, ainda, da geometria do problema (Fig. 2), retirar o seguinte (Teorema de Pitágoras no triângulo OAB):

$$|1+\text{cis}\theta|^2 = \text{sen}^2\theta + (1+\cos\theta)^2$$
$$= \text{sen}^2\theta + 1 + 2.\cos\theta + \cos^2\theta$$
$$= 2 + 2.\cos\theta = 2.(1+\cos\theta)$$
$$= 2.\left(1+2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\right) = 4.\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$\therefore\ |1+\text{cis}\theta| = 2.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Como todo complexo pode ser escrito como: $z = |z|.\text{cis}(\arg z)$, segue que:

$$1+\text{cis}\theta = 2.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\text{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Já deu pra sentir o poder da relação geometria/complexos? ☺

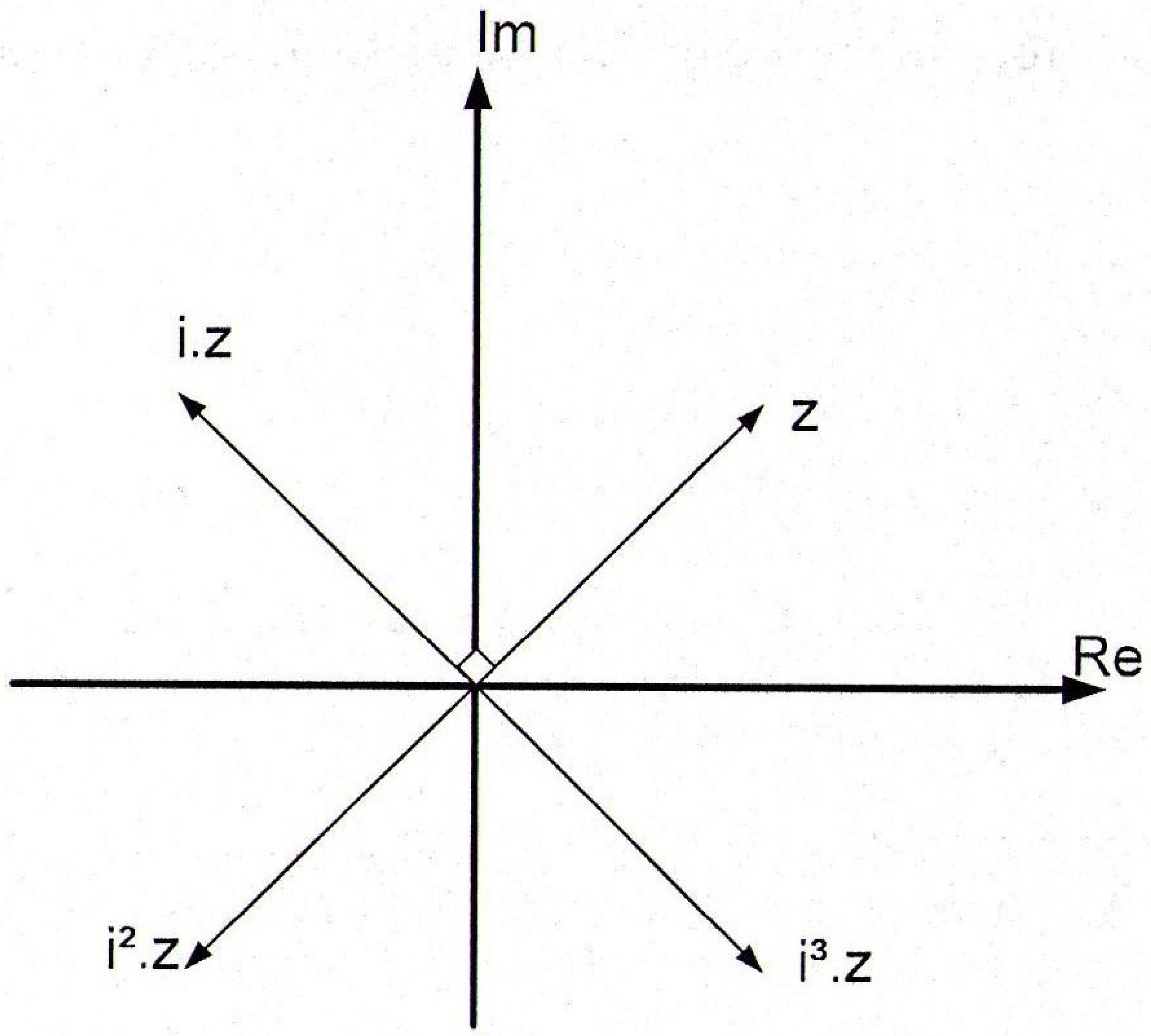


Fig. 2.1.3

Ta legal! Entendi como funciona a rotação de um vetor complexo. Mas como poderá ser cobrado esse conhecimento eventualmente em uma prova?

Autor:

A representação vetorial de complexos nos permite resolver problemas de vetores com a ferramenta dos números complexos e vice-versa!

Vejamos como essa nova ferramenta poderá nos ajudar a resolver aquelas questões trabalhosas de rotação de vetores!

Exemplo 2.1.a Considere o quadro ABCD definido pela diagonal AC com extremidades $A = (1,1)$; $B = (3,4)$. Determine os demais vértices do polígono.

Solução:

Vamos imaginar o problema no plano complexo. Note que o vetor $\overrightarrow{BC}$ é dado pela rotação do vetor $\overrightarrow{AB}$ de 90 graus nos sentido trigonométrico. Podemos escrever:

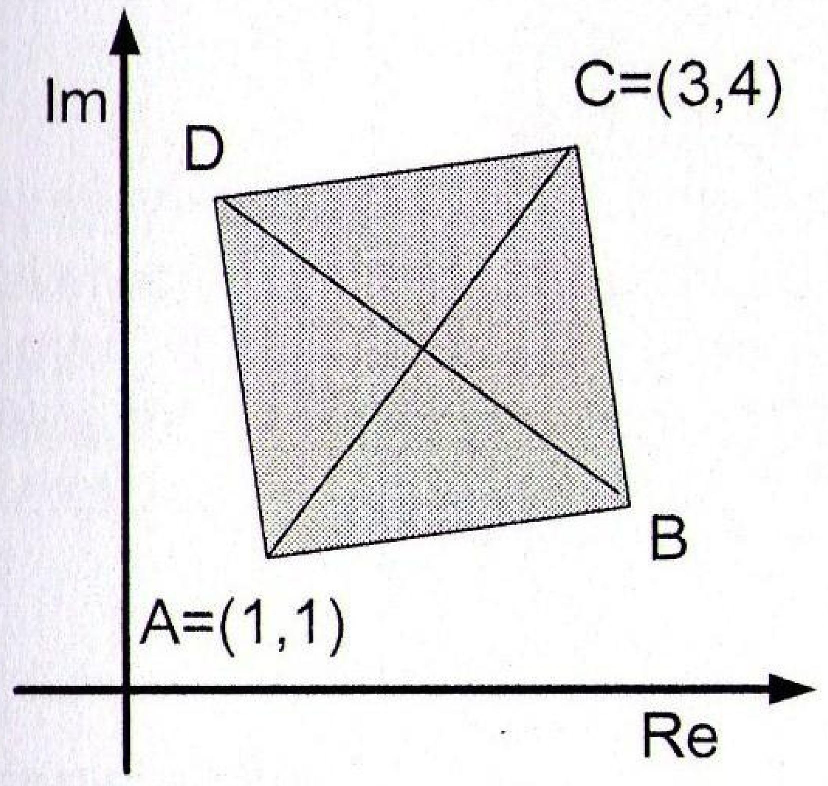


Fig. I

$$\overrightarrow{BC} = i.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow C - B = i.(B - A)$$
$$\Leftrightarrow (3+4i) - B = i.B - i.(1+i)$$
$$\Leftrightarrow (3+4i) + (i-1) = (1+i).B$$
$$\Leftrightarrow B = \frac{2+5i}{1+i} = \frac{2+5i}{1+i}.\frac{1-i}{1-i}$$
$$= \frac{7+3i}{2} = \left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$$
$$\boxed{\therefore B = \left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)}$$

Para achar o ponto D poderíamos proceder da mesma forma. Outra forma seria perceber que os vetores são $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ equivalentes (vetores eqüipolentes).

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow B - A = C - D \Leftrightarrow D = C - B + A = \left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$$
$$\boxed{D = \left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)}$$

Rotação de Eixos

Um famoso problema da Geometria Analítica consiste em determinar as coordenadas de um ponto de uma figura geométrica em relação a um novo sistema de coordenadas rotacionado de certo ângulo em relação ao sistema de eixos original. Tal problema nos permite determinar, por rotação, equações simplificadas de figuras geométricas (por exemplo, as seções cônicas).

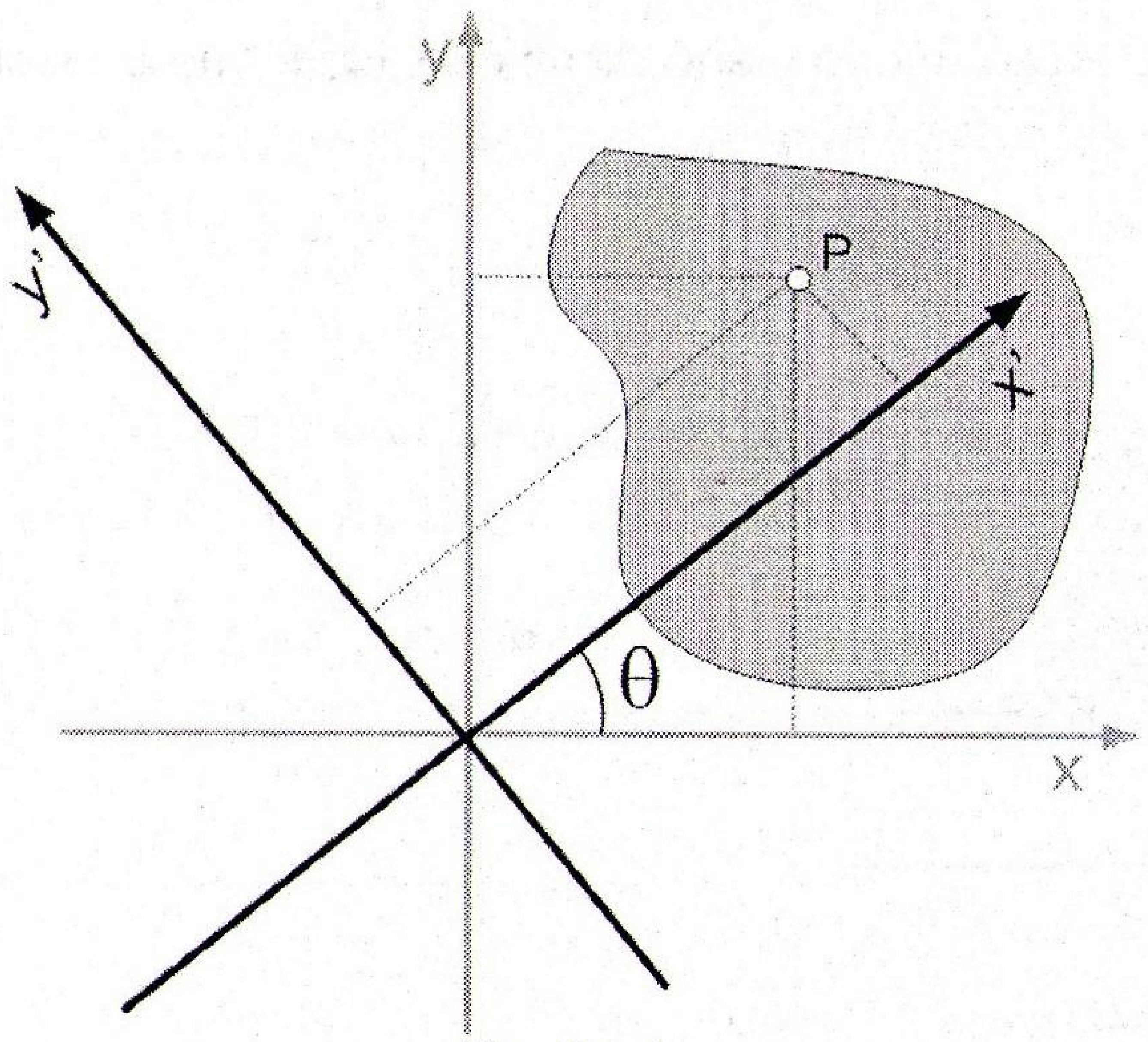


Fig. 2.1.4

Os alunos são levados a "decorar" as fórmulas de rotação de eixos, uma vez que sua dedução por geometria básica é considerada longa.

$$\begin{cases} x' = x.\cos\theta + y.\text{sen}\theta \\ y' = -x.\text{sen}\theta + y.\cos\theta \end{cases}$$

Ora, mas isso se torna tão simples usando complexos! Rotacionar os eixos de um ângulo θ e escrever as novas coordenadas de P são equivalentes a escrever as coordenadas de P' (o vetor rotacionado de –θ) no sistema original. Basta observar a Figura 2.1.5.

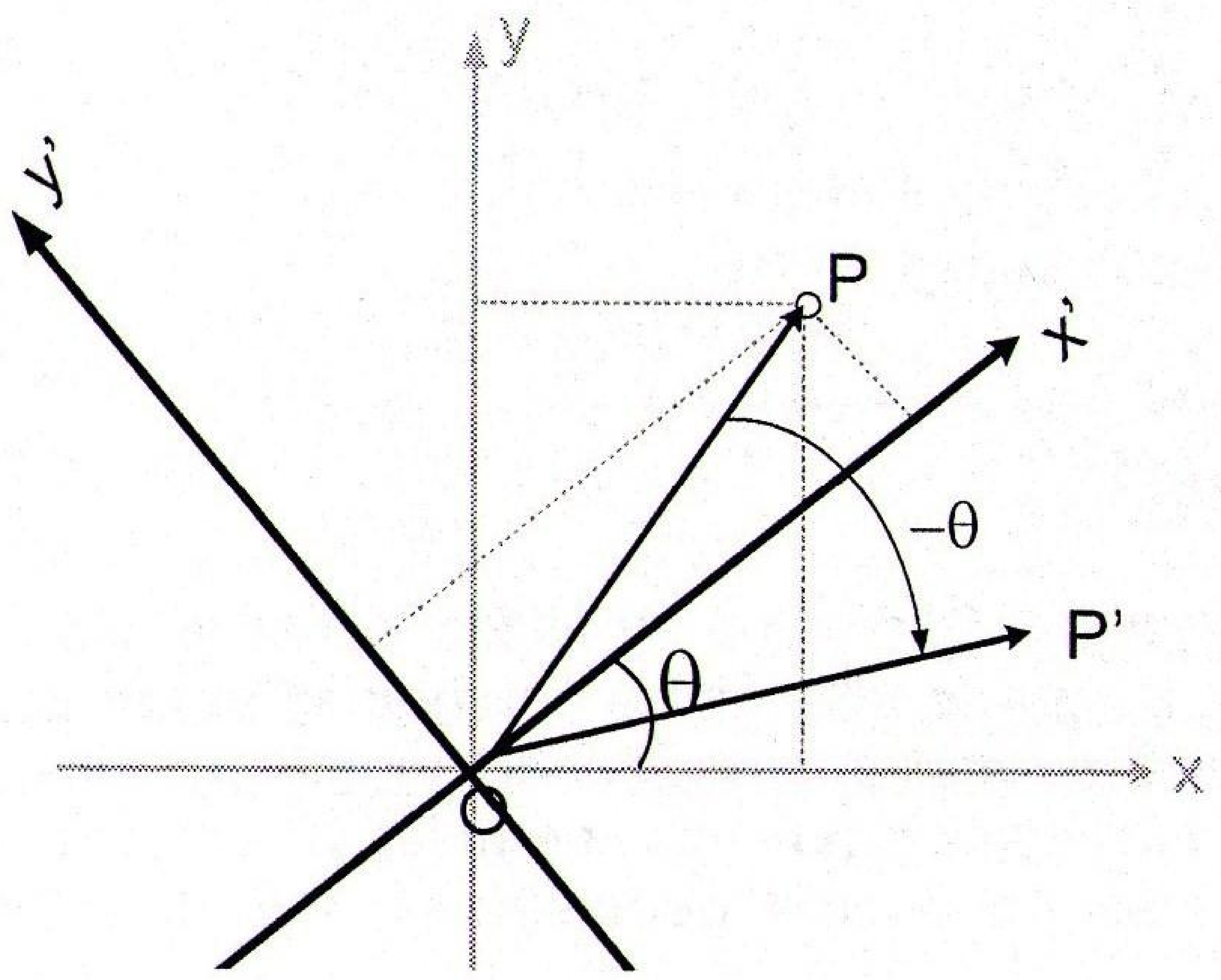


Fig. 2.1.5

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP}.\text{cis}(-\theta) \Rightarrow x'+y'.i = (x+y.i).(\cos\theta - i.\text{sen}\theta)$$

$$\therefore \begin{cases} x' = x.\cos\theta + y.\text{sen}\theta \\ y' = -x.\text{sen}\theta + y.\cos\theta \end{cases}$$

A demonstração da fórmula torna-se bem simples usando complexos! Devemos lembrar também que é sempre melhor (ou pelo menos mais seguro) saber a origem das fórmulas a serem utilizadas numa prova em casos de emergência, tornando essa demonstração bem útil na resolução de exercícios de rotação de eixos.

Translação

A soma de um complexo z por outro complexo $w = a + b.i$, acarretará na translação do afixo z, sendo acrescentados 'a' unidades à sua componente horizontal, e 'b' unidades à sua componente vertical.

Exemplo 2.1.b Considere o conjunto A de pontos de uma coroa circular de raio interno 1 e raio externo 2 (bordas incluídas) no plano complexo. Determine a imagem de A pela função:

$$g(z) = \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right).z + (1+i)$$

Solução:

Vamos imaginar o problema no plano complexo.

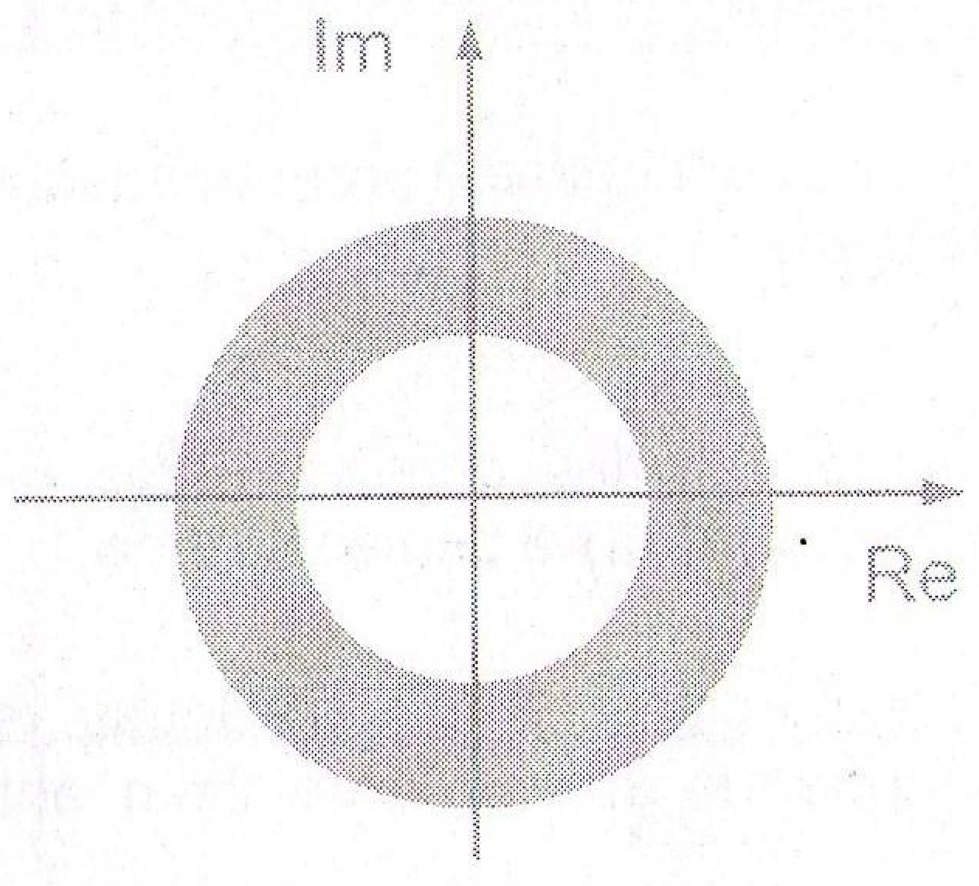


Fig. I

Sabemos que: $w = \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) = 2.\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Portanto a multiplicação de um complexo z por w dobra o comprimento de z e o rotaciona de 45°. Aplicando isso no anel da questão, os raios da figura são dobrados (Fig. II) . Ao somar o complexo (1+i) estamos transladando a figura 1 unidade para direita e 1 unidade para cima no plano complexo. Com isso a imagem de A pela função g está representada na figura III.

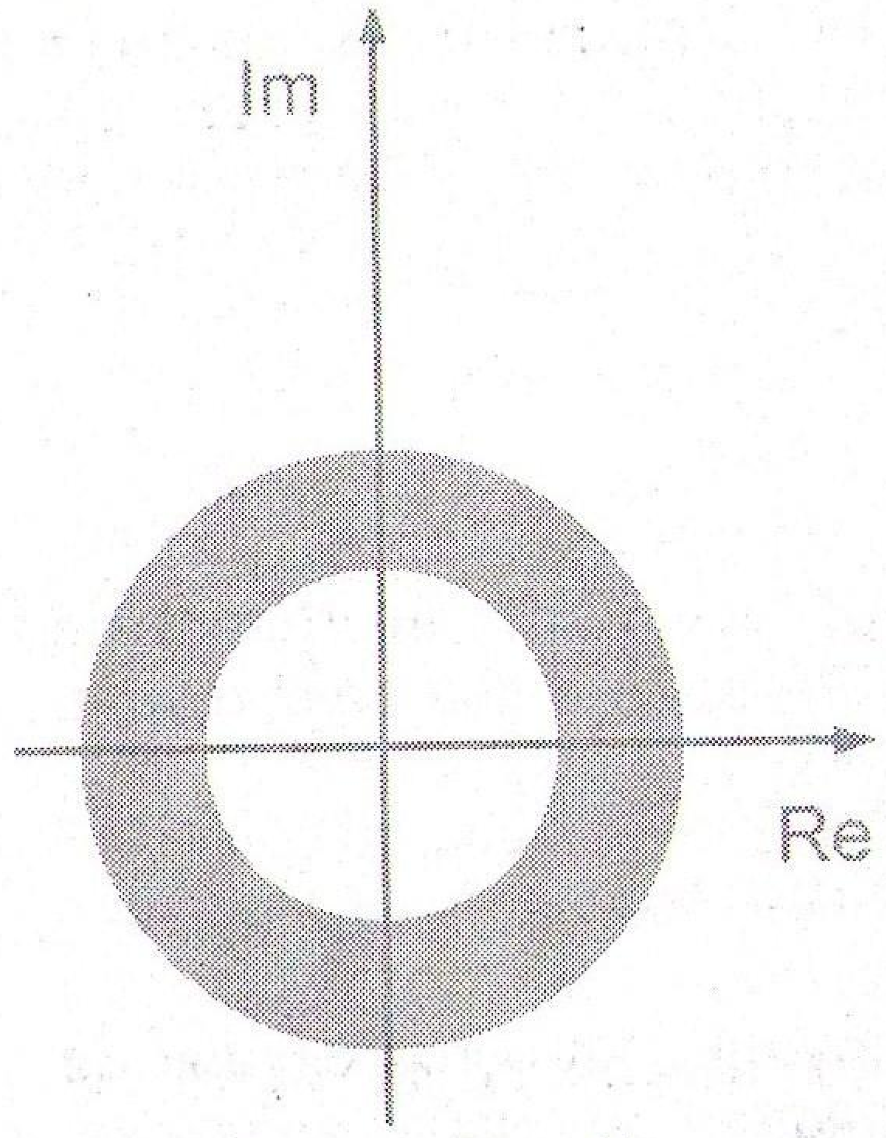


Fig. II

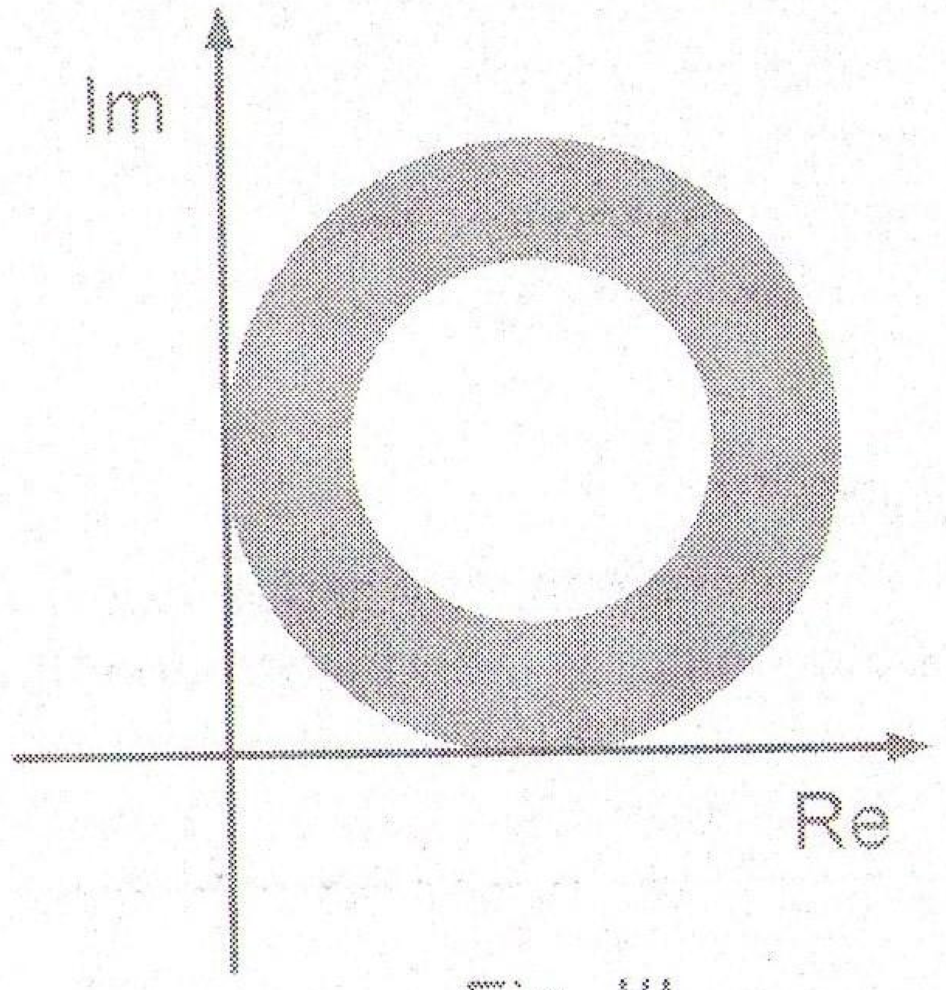


Fig. III

A imagem é um anel de circunferências centrado em (1,1) com raio interno igual a 2, e raio externo igual a 4.

2.2 A Geometria Plana

Vamos agora tentar aplicar os conceitos e propriedades vistos até agora em problemas de geometria plana.

Raízes da Unidade

Nos exercícios do capítulo 1 vimos que as raízes n-ésimas da unidade formam uma P.G. de razão $\text{cis}(2\pi/n)$ e primeiro termo 1.

Se plotarmos essas raízes no plano de Argand-Gauss, teremos n afixos com vetores representantes formando um ângulo de $2\pi/n$ entre si.

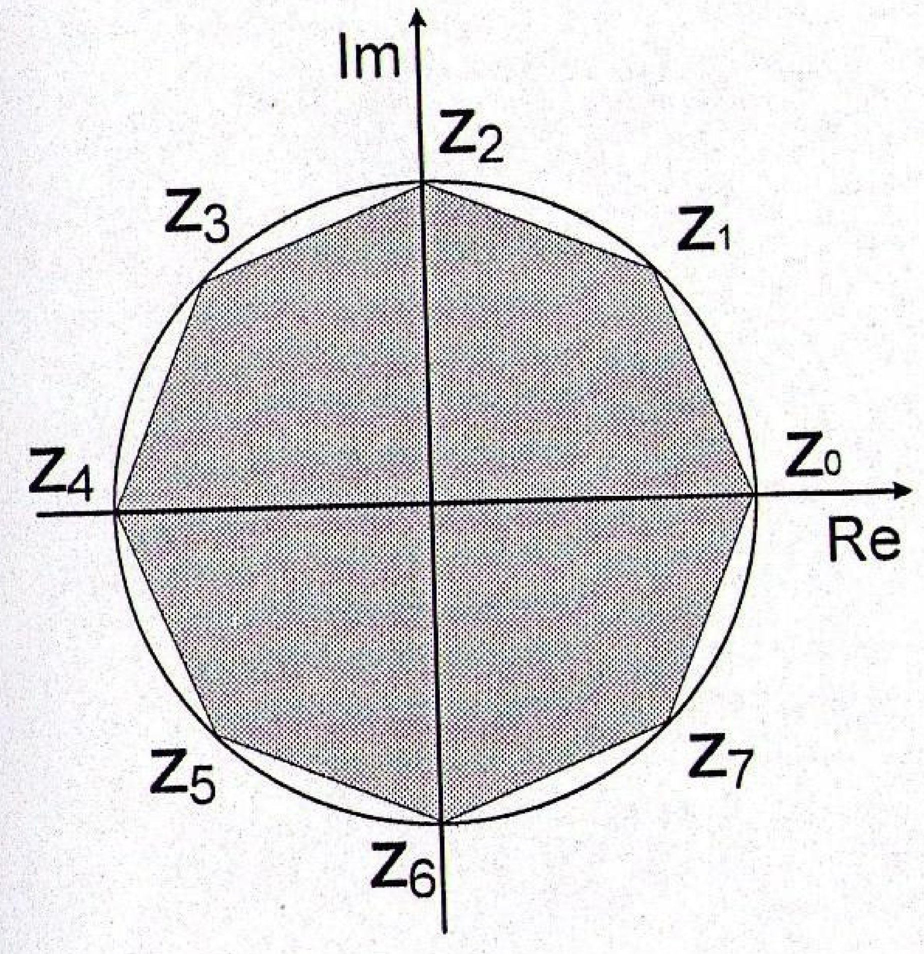


Fig. 2.2.1

Exemplo: $z^8 - 1 = 0$

A soma das raízes da equação, pela relação de Girard, é nula (já estudamos isso!), o que está coerente com o fato do polígono formado acima ser regular (uma vez que, nesse caso, todos os vetores representantes dos afixos se anulam).

Conclusão: Os afixos das raízes n-ésimas da unidade formam no plano complexo um polígono regular de n lados.

Condições para um triângulo ser eqüilátero

Teorema: Os afixos dos complexos z_1, z_2, z_3 formam um triângulo eqüilátero, se e somente se $z_1 + w.z_2 + w^2.z_3 = 0$, onde w é <u>uma</u> raiz cúbica da unidade, diferente de 1.

Resultado 2.2.1

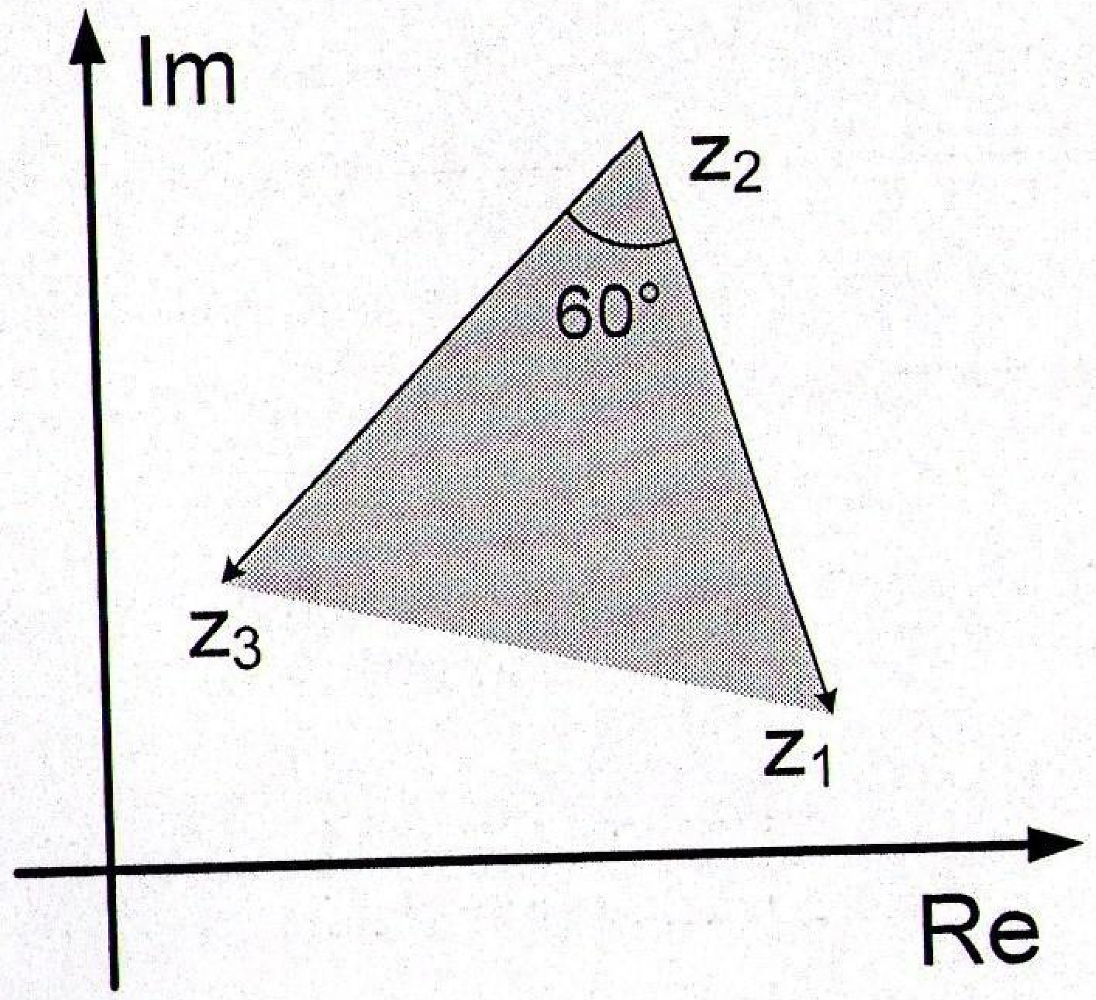


Fig. 2.2.2

Demonstração:

$$z_1, z_2, z_3 \text{ formam um triângulo eqüilátero } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{z_2 z_1} \text{ e } \overline{z_2 z_3} \text{ formam um ângulo de } \pm 60° \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_3 - z_2).\text{cis}\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = z_1 - z_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1 + z_2.\underbrace{\left(\text{cis}\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) - 1\right)}_{= -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = \text{cis}\left(+\frac{2\pi}{3}\right) = w} - z_3.\text{cis}\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1 + z_2.\text{cis}\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) + z_3.\underbrace{\text{cis}\left(\pm\frac{4\pi}{3}\right)}_{= w^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1 + z_2.w + z_3.w^2 = 0$$

Exemplo 2.2.a (Putnam 67) Seja *ABCDEF* um hexágono inscrito em uma circunferência de raio r. Mostre que se $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF} = r$, então os pontos médios de $\overline{BC}, \overline{DE}, \overline{FA}$ são os vértices de um triângulo eqüilátero.

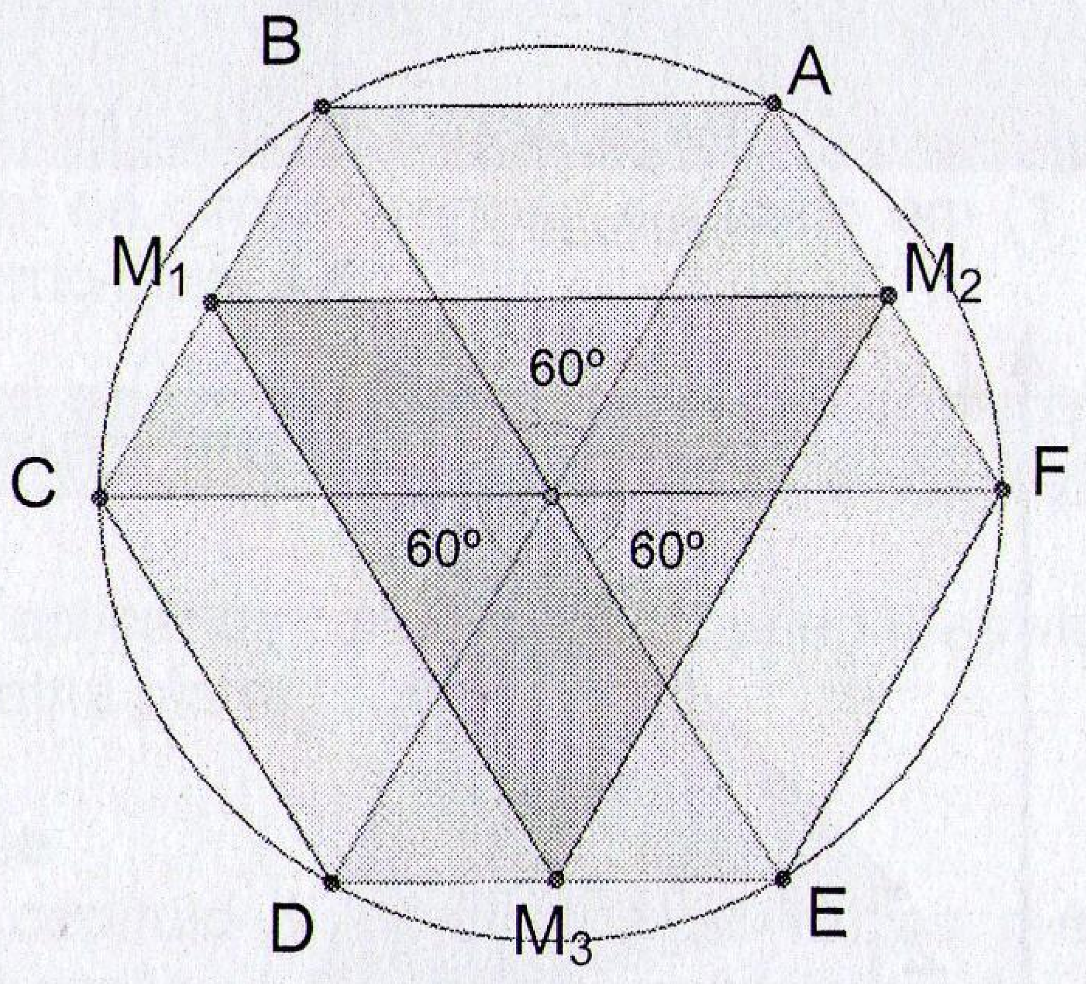


Fig. I

Solução: Consideremos a origem do plano complexo no centro da circunferência. Sabendo que os afixos B, D, F correspondem, respectivamente, às extremidades dos vetores rotacionados de 60° representantes dos afixos A, C, E, podemos escrever:

$$B = A.\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) \; ; \; D = C.\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) \; ; \; F = E.\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Os pontos médios de BC, DE e FA serão:

$$M_1 = \frac{A+F}{2} \; ; M_2 = \frac{C+B}{2} \; ; \; M_3 = \frac{E+D}{2}$$

Ou ainda: $M_1 = \dfrac{A + E.\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} \; ; M_2 = \dfrac{C + A.\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} \; ; \; M_3 = \dfrac{E + C.\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}$

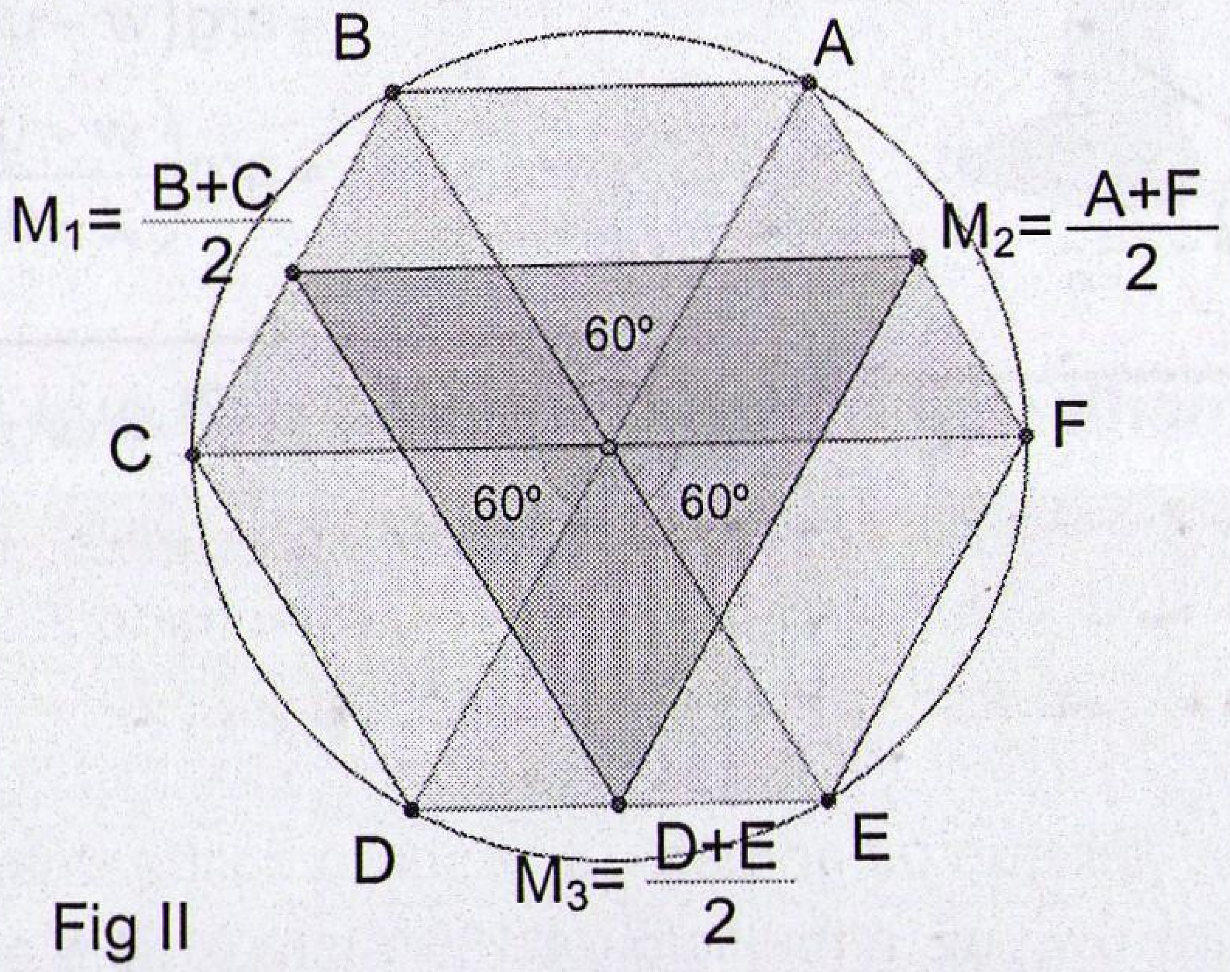


Fig II

Basta analisar se esses pontos formam um triângulo eqüilátero. Vamos usar o teorema que acabamos de ver para testar se os pontos formam um triângulo eqüilátero.

Sendo $w = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ uma raiz cúbica da unidade diferente de 1

$$M_1 + M_2.w + M_3.w^2 = \frac{1}{2}\left(A + E.\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) + C + A.\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) + E + C.\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(A\left(1 + w.\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + C.\left(w + w^2.\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + E.\left(w^2 + \text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(A\left(1 + \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right) + C.w\left(1 + \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right) + E.\left(\text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(A(1-1) + C.w(1-1) + E.\left(-\frac{1}{2} - \frac{i.\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{i.\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 0$$

Logo, do teorema que mostramos anteriormente (Resultado 2.2.1), os pontos médios de BC,DE e FA formam um triângulo eqüilátero.

Condições para colinearidade de 3 pontos

Como calcular, de maneira prática o ângulo entre os vetores formados pelos complexos de afixos u,v,w dados por $\overrightarrow{uw}$, $\overrightarrow{uz}$?

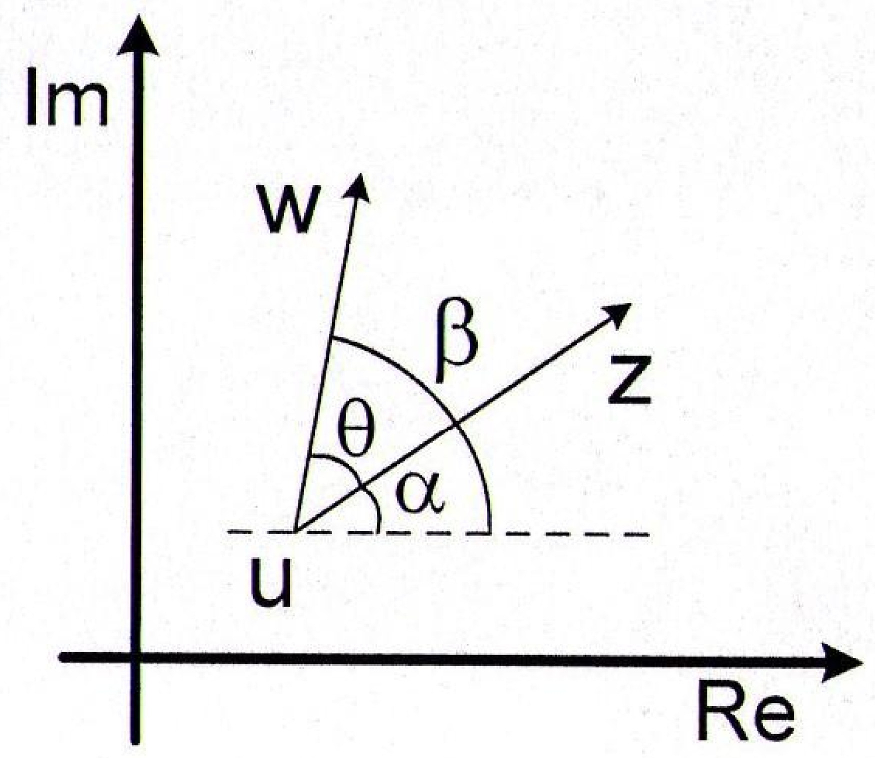


Fig 2.2.3

Da figura 2.2.3, tiramos que:

$$\text{ang}\left(\overrightarrow{uw},\overrightarrow{uz}\right)=\arg\left(\overrightarrow{uw}\right)-\arg\left(\overrightarrow{uz}\right)$$
$$=\arg(w-u)-\arg(z-u)$$
$$=\arg\left(\frac{w-u}{z-u}\right)$$

$$\boxed{\text{ang}\left(\overrightarrow{uw},\overrightarrow{uz}\right)=\arg\left(\frac{w-u}{z-u}\right)}$$

Resultado 2.2.2

Com isso, fica claro dizer que os pontos u,w,z serão colineares, quando, e só quando o ângulo entre $\overrightarrow{uw}$, $\overrightarrow{uz}$ é múltiplo de 180°. Isto é, se e somente se:

$$\frac{w-u}{z-u}\in\mathbb{R}$$

Só que, se um complexo é real, o seu conjugado é igual a ele mesmo!

$$\frac{w-u}{z-u}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{w-u}{z-u}=\overline{\left(\frac{w-u}{z-u}\right)}\quad\Leftrightarrow\frac{w-u}{z-u}=\frac{\overline{w}-\overline{u}}{\overline{z}-\overline{u}}$$

Ou seja, uma condição para que 3 afixos complexos sejam colineares é:

$$\boxed{u,z,w\text{ colineares}\Leftrightarrow\frac{w-u}{z-u}=\frac{\overline{w}-\overline{u}}{\overline{z}-\overline{u}}}$$

Resultado 2.2.3

Condição para que dois triângulos sejam semelhantes

Da geometria, dizemos que dois triângulos são semelhantes quando os ângulos correspondentes nos 2 triângulos são iguais, bem como as razões entre os comprimentos de dois pares de lados correspondentes forem iguais nos dois triângulos.

No caso da semelhança de triângulos com afixos complexos os ângulos internos são dados por argumentos de diferenças entre complexos. Portanto é necessário tomar cuidado também com a orientação do triângulo.

$$\Delta z_1z_2z_3\neq\Delta z_3z_2z_1$$

Da definição acima, temos que dois triângulos $\Delta z_1z_2z_3$, $\Delta w_1w_2w_3$ são semelhantes (notação: $\Delta z_1z_2z_3\sim\Delta w_1w_2w_3$) se e somente se:

$$\arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)=\arg\left(\frac{w_2-w_1}{w_3-w_1}\right)\quad\text{e}\quad\frac{|z_2-z_1|}{|z_3-z_1|}=\frac{|w_2-w_1|}{|w_3-w_1|}$$

Note que é suficiente dizer que: $\Delta z_1z_2z_3\sim\Delta w_1w_2w_3\Leftrightarrow\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\dfrac{w_2-w_1}{w_3-w_1}$

Teorema: Dois triângulos são semelhantes ($\Delta z_1z_2z_3 \sim \Delta w_1w_2w_3$) se e somente se:

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resultado 2.2.4

Demonstração:

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z_1.w_2 + z_3.w_1 + z_2.w_3 - z_3.w_2 - z_2.w_1 - z_1.w_3$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$$

Note que a condição para que um triângulo seja eqüilátero está coerente com esse resultado.

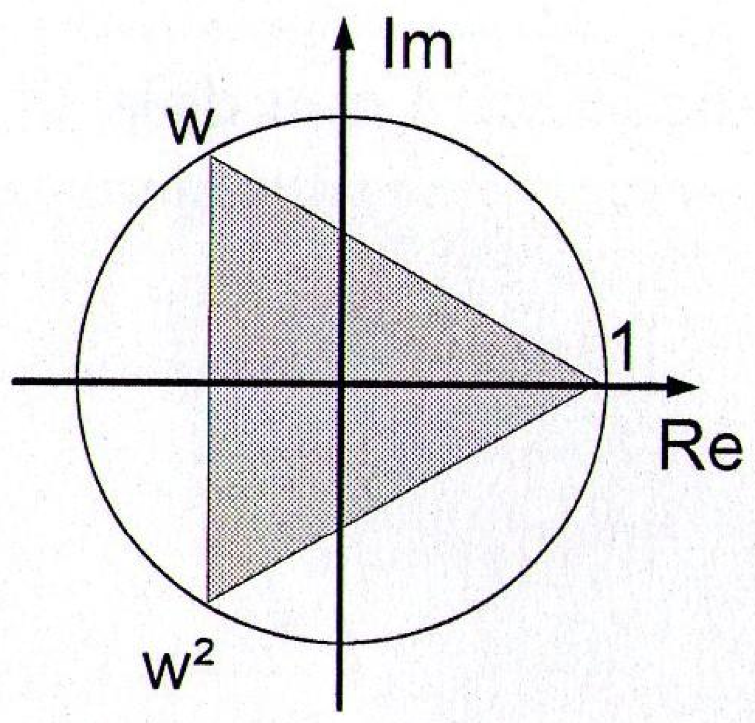


Fig. 2.2.4

Se o triângulo $\Delta z_1z_2z_3$ for semelhante ao triângulo $\Delta 1ww^2$ onde w é uma raiz cúbica da unidade diferente de 1, deveremos ter que o triângulo $\Delta z_1z_2z_3$ é eqüilátero.

De fato, usando o teorema que acabamos de mostrar:

$$\begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & w & 1 \\ z_3 & w^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z_1w + z_2w^2 + z_3 - z_3.w - z_1.w^2 - z_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1.(w - w^2) + z_2.(w^2 - 1) + z_3.(1 - w) = 0$$

Se $w^2 + w + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow z_1.w(1 - w) + z_2.(w^2 - 1) + z_3.(1 - w) = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1.w(1 - w) - z_2.(1 - w)(1 + w) + z_3.(1 - w) = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1.w - z_2.(1 + w) + z_3 = 0$$

Essa relação é exatamente igual à mostrada quando discutimos a condição para que o triângulo fosse eqüilátero.

OBS: *Fica como exercício ao leitor provar que se u, v e w formam um triângulo eqüilátero, então:*

$$u^2 + v^2 + w^2 = u.v + u.w + v.w$$

Resultado 2.2.5

Dica do Autor: *Nós apresentamos aqui várias maneiras de testar se um triângulo formado por afixos complexos é eqüilátero (ou até mesmo testar se eles formam uma reta no plano complexo). Cabe ao leitor decidir se essas expressões são ou não práticas na hora da resolução de problemas. Algumas pessoas preferem decorar tais expressões, enquanto outras preferem deduzi-las novamente na hora da resolução do problema. O importante a se tirar como conclusão é que testar se os afixos formam uma reta, ou um triângulo eqüilátero não passa de um problema de geometria analítica (usando vetores!).*

2.3 Representações de Lugares Geométricos

Vimos no capítulo I que podemos interpretar o módulo da diferença entre dois complexos como sendo a distância entre os afixos dos mesmos no plano complexo. Muitos lugares geométricos dos mais estudados na geometria analítica são definidos pelo conceito de distância. Não nos preocuparemos com propriedades específicas desses L.G., mas sim, como trabalharmos com eles no ramo dos complexos. Sugerimos que para a total compreensão do que discutiremos a seguir, o aluno tenha uma noção das definições dos L.G. citados, consultando um livro de geometria analítica. Vamos agora justamente analisar como descrever esses lugares geométricos na forma de representação no plano complexo.

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos que eqüidistam de um mesmo ponto fixo no plano. A expressão que nos dá a noção de distância é o módulo da diferença entre dois complexos.

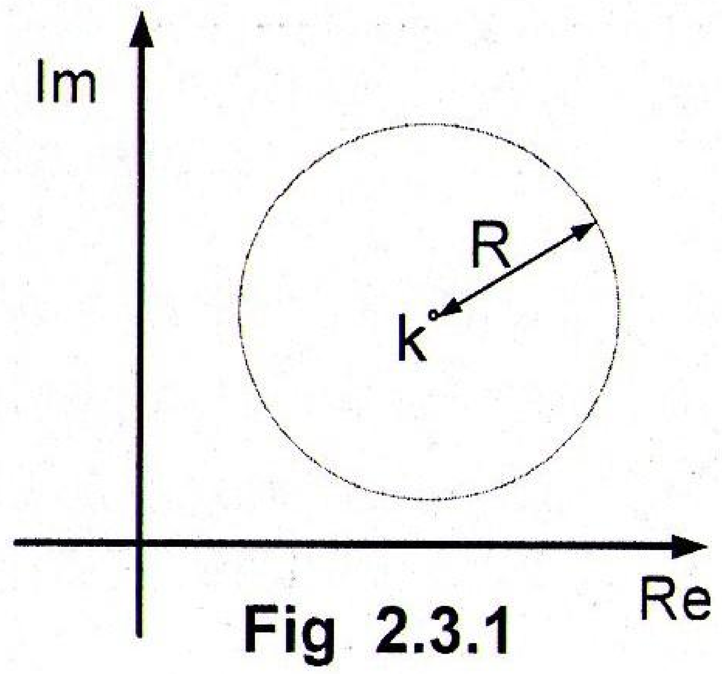


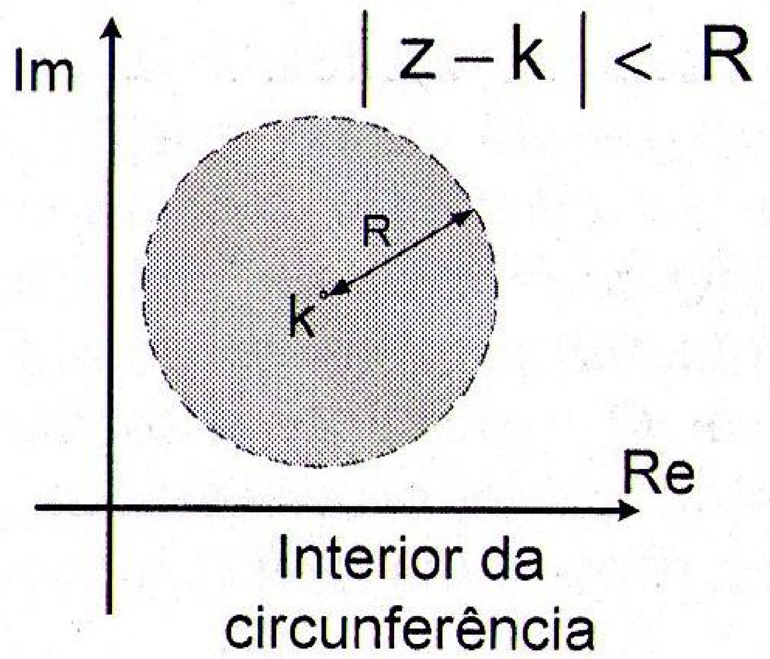
Fig 2.3.1

$$|z-k| = R$$

Circunferência de centro em k e raio R

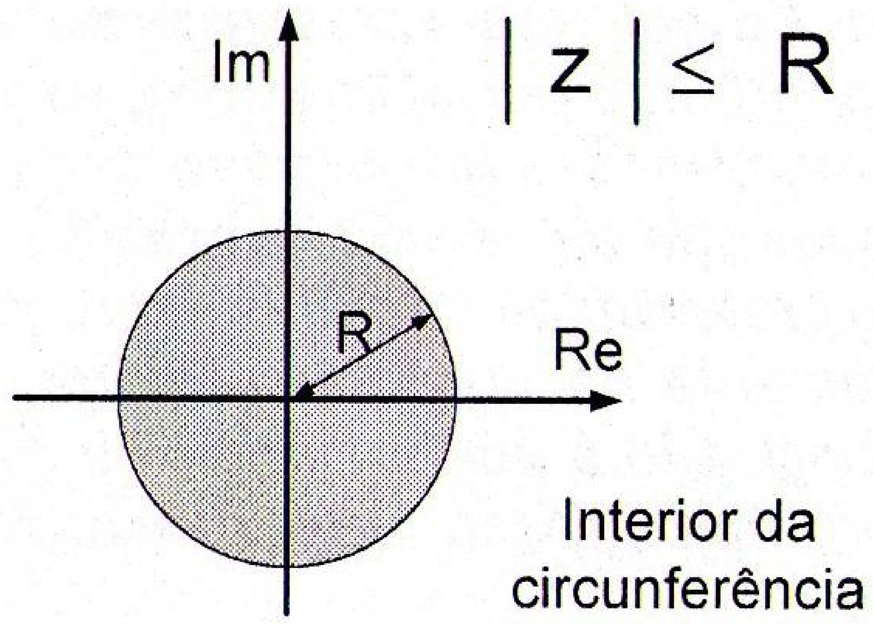
$k \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}$

Alguns casos particulares:



Interior da circunferência (excluindo as bordas)

Fig 2.3.2



Interior da circunferência centrada em (0,0) (incluindo as bordas)

Fig 2.3.3

Elipse é o lugar geométrico dos pontos tais que a soma das distâncias desses pontos a dois pontos fixos (os focos da elipse) é constante e maior que a distância entre os mesmos dois pontos fixos.

Com essa definição fica evidente que podemos representar o conjunto de elipses no plano complexo como sendo:

$$|z-F_1| + |z-F_2| = 2a$$

Elipse de focos F_1 e F_2, e eixo maior 2a.

$F_1, F_2 \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$

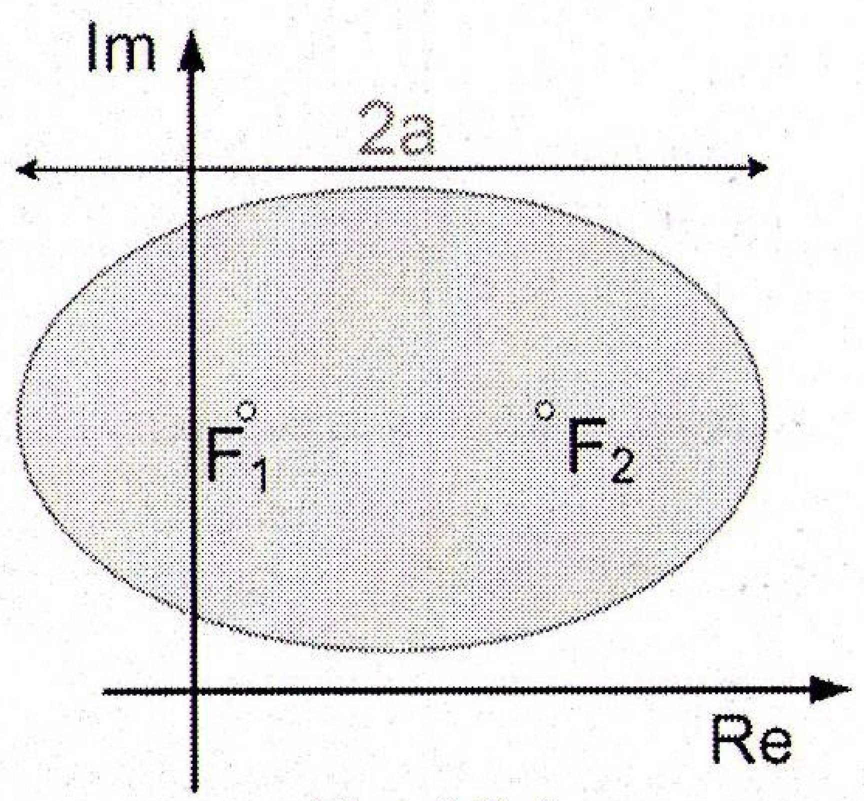
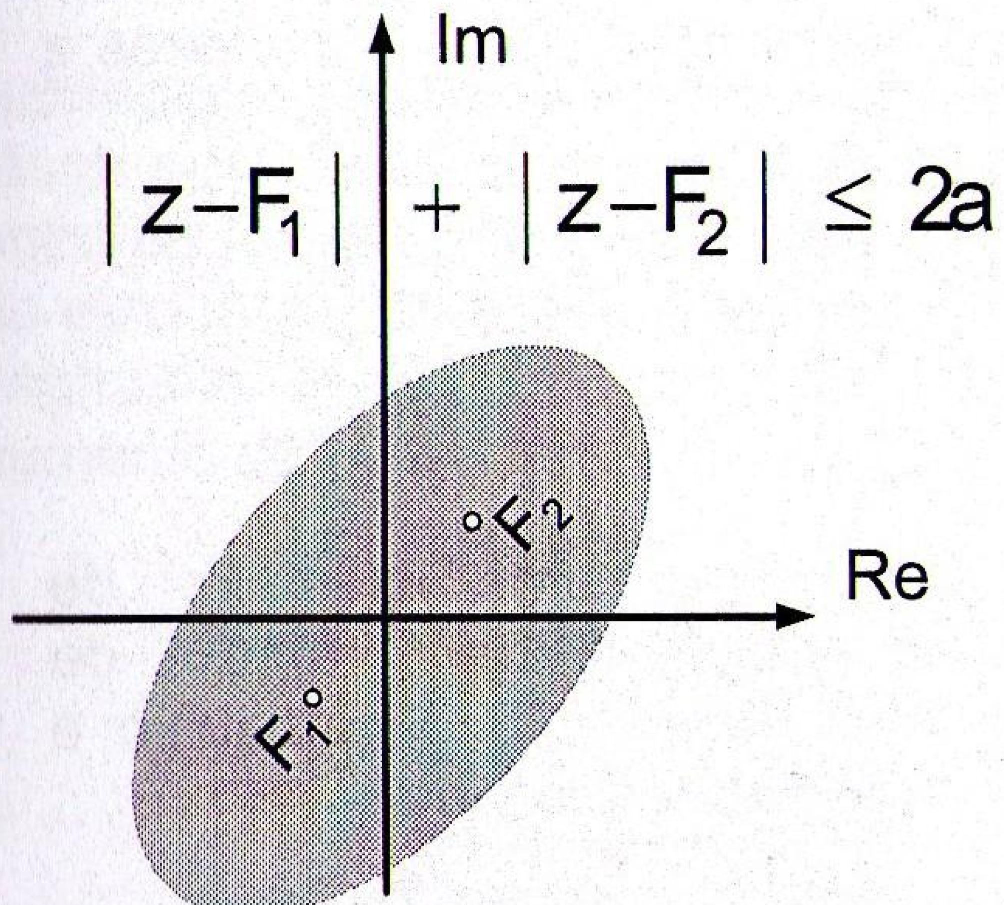


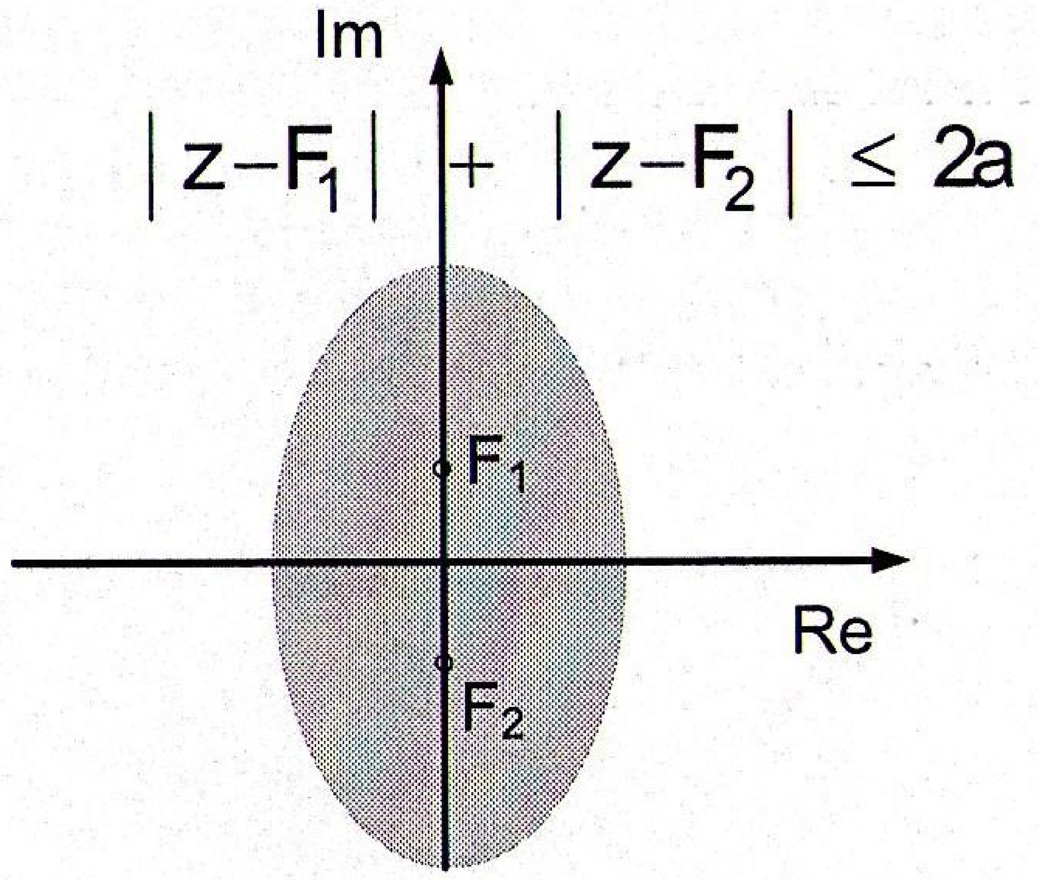
Fig. 2.3.4

Alguns casos particulares:



Interior de uma elipse rodada, centrada em (0,0) (incluindo as bordas)

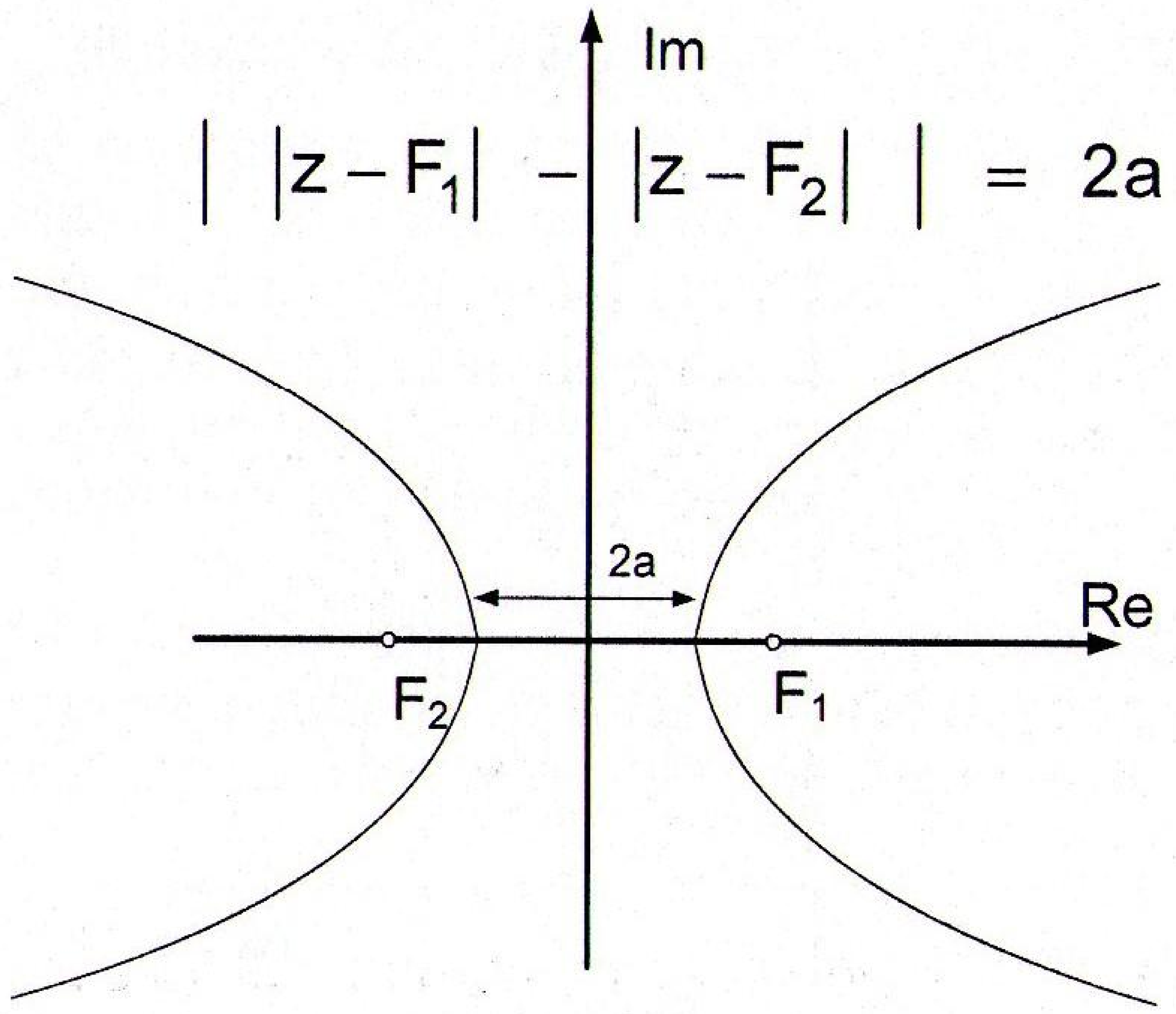
Fig. 2.3.5



Interior de uma elipse com eixo maior vertical, centrada em (0,0) (incluindo as bordas)

Fig. 2.3.6

Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos tais que o módulo da diferença das distâncias desses pontos a dois pontos fixos (os focos da hipérbole) é constante.

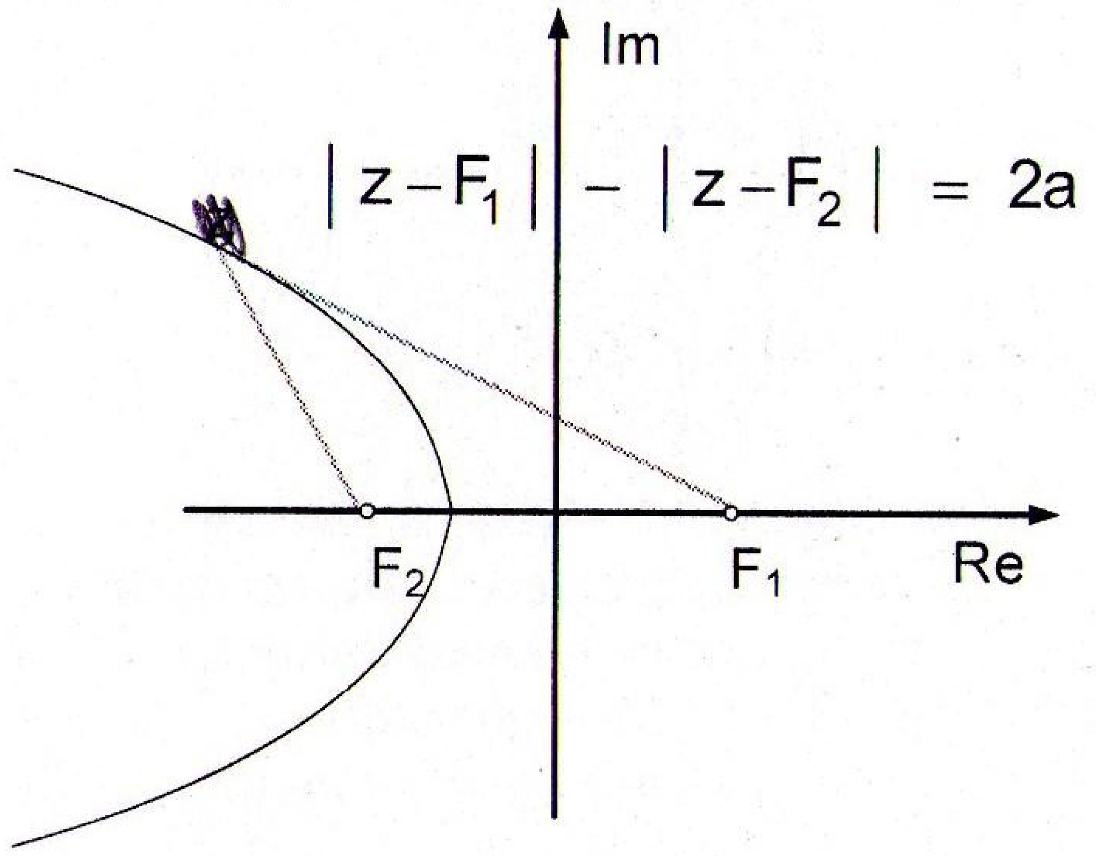


Hipérbole de focos
F_1 e F_2, e eixo real 2a
$F_1, F_2 \in \mathbb{C},\ a \in \mathbb{R}$

Fig. 2.3.7

Podemos representar também apenas um dos ramos da hipérbole.Para representar apenas um dos ramos, devemos utilizar apenas os complexos z tais que:

$$|z - F_1| > |z - F_2|$$



Ou seja, um exemplo de reprentação de ramo de hiperbole no plano complexo é dado pela equação:

$$|z - F_1| - |z - F_2| = 2a$$

Fig. 2.3.8

Reta Mediatriz é o lugar geométrico dos pontos que eqüidistam de dois pontos fixos no plano.

$|z - a| = |z - b|$
Reta Mediatriz relativa
ao segmento ab

$a, b \in \mathbb{C}$

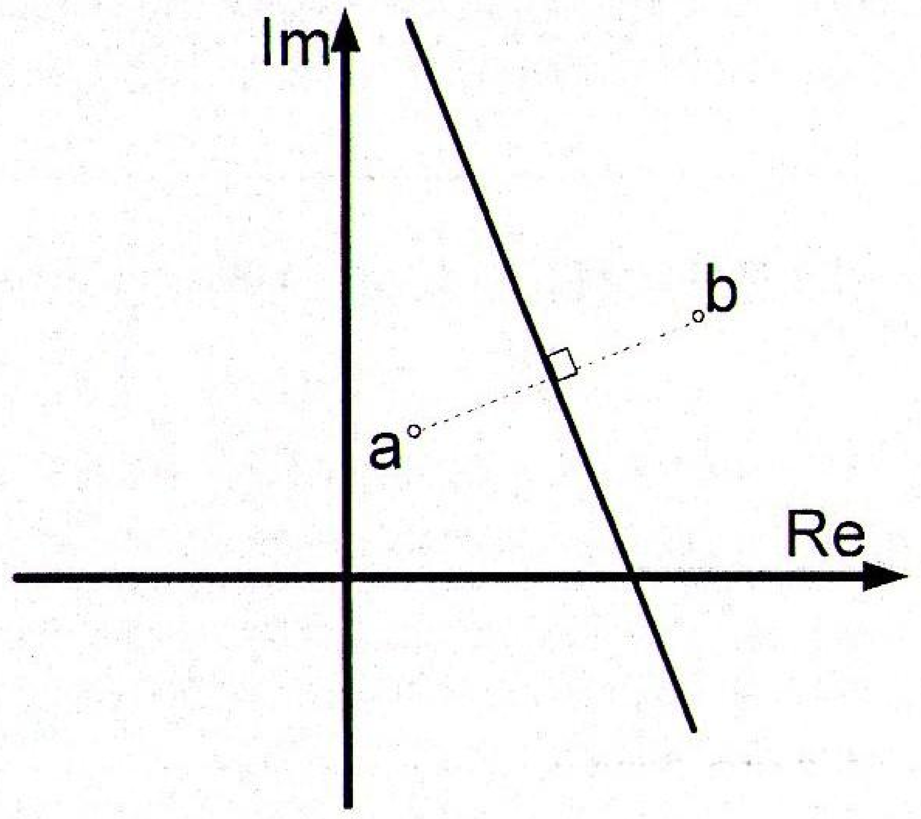
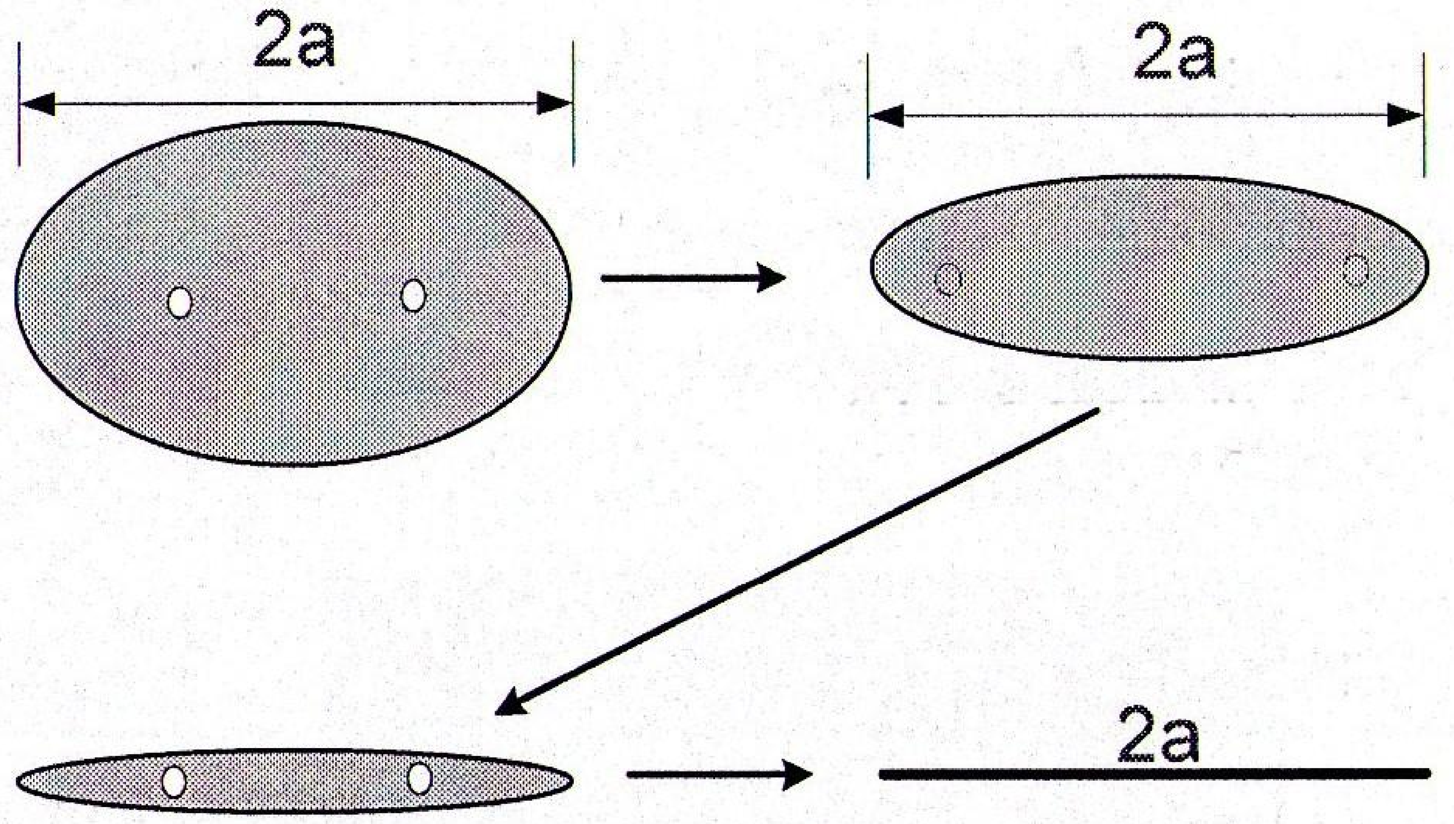


Fig. 2.3.9

Degenerações
Ao analisarmos lugares geométricos representados por números complexos devemos ter alguns certos cuidados. Vejamos o seguinte exemplo.

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| + |z + 1| = 2\}$$

A princípio, podemos pensar que o conjunto tem como imagem uma elipse de focos nos complexos 1 e -1. Note, porém, que a distância focal (distância entre os focos) é de 2 unidades no plano, o que coincide com o comprimento do eixo maior da elipse. Quando isso acontece, a elipse se degenera em um segmento de reta do tamanho do seu eixo maior. As setas indicam o aumento da distância focal.



Vejamos outro exemplo de degeneração:

$$\{z \in \mathbb{C}: |z-1| + |z+1| = 1\}$$

Não é difícil verificar que não existe z complexo que atenda à condição dada no conjunto (deixamos como **exercício** pro leitor que verifique isso). Quando isso acontece dizemos que a imagem do conjunto dado é o **conjunto vazio**.

Exemplo 2.3.a (ITA) Considere o conjunto dos complexos tais que:

$$|z - i.a| \le k$$

onde a e k são constantes reais positivas tais que $a > k$. Determine o complexo z pertencente à imagem desse conjunto com o menor argumento.

Solução: A representação geométrica do conjunto no plano complexo é a mostrada na Fig. I

Note que as imagens de z percorrem a circunferência ilustrada, ou o interior dela, e para que z tenha argumento mínimo z deve ser tal que seu vetor representante seja tangente à circunferência.

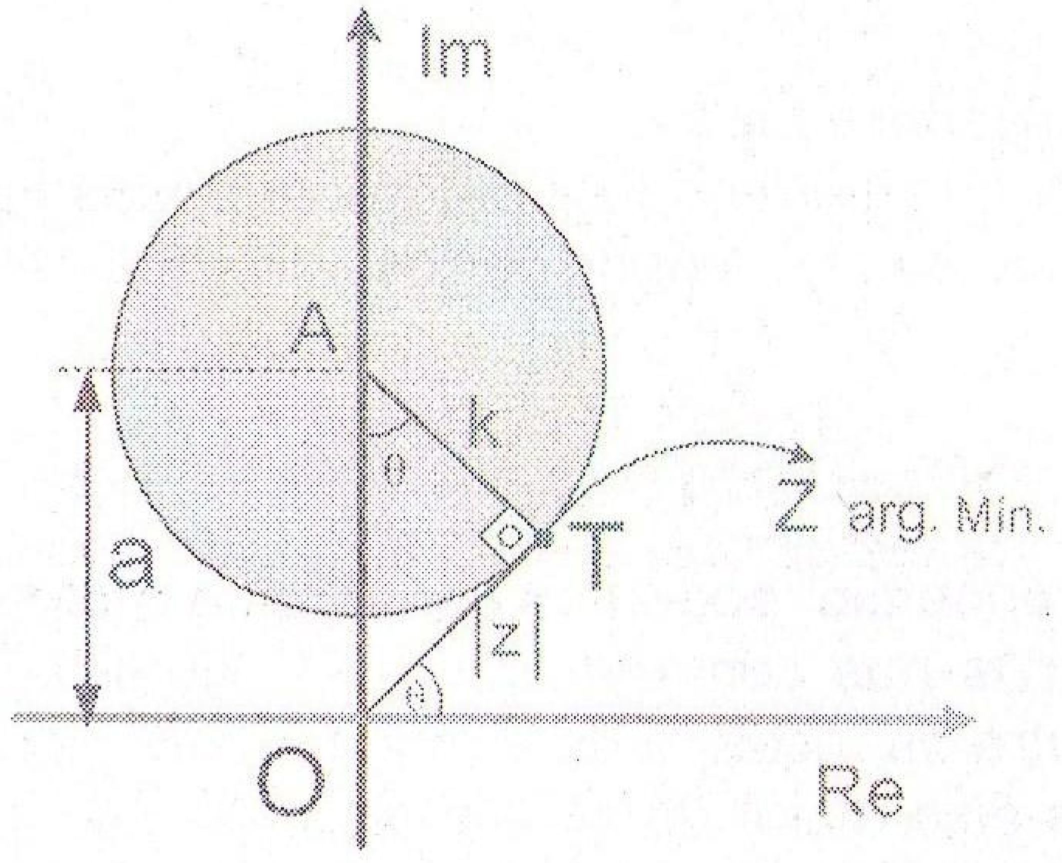


Fig. I

Do triângulo retângulo OAT formado segue:

$$a^2 = |z|^2 + k^2 \quad \therefore \quad |z| = \sqrt{a^2 - k^2}$$

Da geometria do problema, é fácil ver que:

$$\cos\theta = \frac{k}{a} \qquad \text{sen}\theta = \frac{|z|}{a} = \frac{\sqrt{a^2-k^2}}{a}$$

Logo o complexo de argumento mínimo será:

$$z = |z|.\text{cis}\theta = \sqrt{a^2-k^2}.\left(\frac{k}{a} + i.\frac{\sqrt{a^2-k^2}}{a}\right)$$

$$z = k.\sqrt{1-\left(\frac{k}{a}\right)^2} + i.\left(\frac{a^2-k^2}{a}\right)$$

Exemplo 2.3.b (IME, ITA) Resolva novamente o exercício 1.12 do primeiro capítulo: Mostre que todas as raízes da equação: $(z+1)^5 + z^5 = 0$ pertencem a uma mesma reta paralela ao eixo imaginário no plano complexo.

Solução:

$$(z+1)^5 + z^5 = 0 \Rightarrow (z+1)^5 = -z^5$$

$$\Rightarrow \left|(z+1)^5\right| = \left|-z^5\right|$$

$$\Rightarrow |z+1| = |z|$$

Ou seja, z descreve a reta mediatriz que liga os complexos −1 e 0 no plano complexo, que é paralela ao eixo imaginário.

Exemplo 2.3.c (IME 78) Determine os valores máximo e mínimo de $|z-4|$ sabendo que: $|z+3i| \le 1$

Solução:
A situação descrita no problema pode ser representada geometricamente:

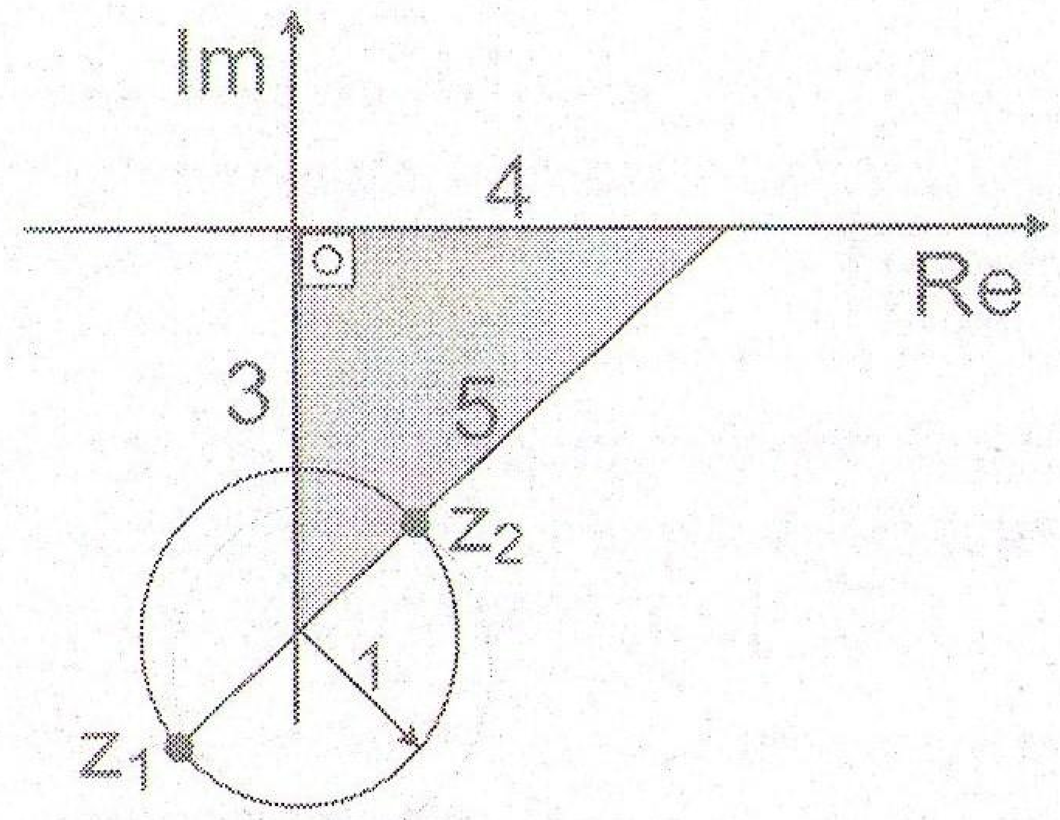


Fig. I

Os complexos que atendem as condições do problema podem ser identificados geometricamente (z_1 e z_2).

A distância deles até o complexo 4 são, respectivamente:

5 + 1 e 5 − 1.

Isto é,

$$|z-4|_{max} = 6$$
$$|z-4|_{min} = 4$$

2.4 Exercícios de Fixação

Exercício 2.1 Dados dois vértices (0,0) e (4,3), qual é a coordenada do terceiro vértice que faz desse polígono um triângulo eqüilátero?

Exercício 2.2 Dados dois vértices (0,0) e (4,3), quais são as coordenadas dos outros dois vértices que fazem desse polígono um quadrado cujos vértices dados são de um mesmo lado?

Exercício 2.3 Determine uma condição entre $z, w, u, v, \bar{z}, \bar{w}, \bar{u}, \bar{v}$ para que $\overrightarrow{zw}$ e $\overrightarrow{uv}$ sejam vetores paralelos no plano complexo.

Exercício 2.4 Determine uma condição entre $z, w, u, v, \bar{z}, \bar{w}, \bar{u}, \bar{v}$ para que $\overrightarrow{zw}$ e $\overrightarrow{uv}$ sejam vetores ortogonais no plano complexo.

Exercício 2.5 Considere o ponto (1,3) no sistema de coordenadas ortogonal. Determine as coordenadas do mesmo ponto num sistema rotacionado de 30° no sentido trigonométrico em relação ao sistema original.

Exercício 2.6 Considere $u = 3+11i$; $v = -2-4i$; $w = 1+5i$; $z = 1+i$. Sobre os afixos desses complexos citados, podemos afirmar:

(a) u,v,w são colineares

(b) u,v,w formam um triângulo eqüilátero

(c) uv é paralelo a wz

(d) uv é perpendicular a wz

Exercício 2.7 – (SBM; Colômbia) Dados um ponto *P* sobre uma circunferência unitária e os vértices $A_1, A_2, \ldots A_n$ de um *n*-ágono regular inscrito, prove que $PA_1^2 + PA_2^2 + \ldots + PA_n^2$ é constante.

Exercício 2.8 Se $A_1, A_2, \ldots A_n$ são vértices de um polígono regular convexo inscrito em uma circunferência de raio unitário, prove que:

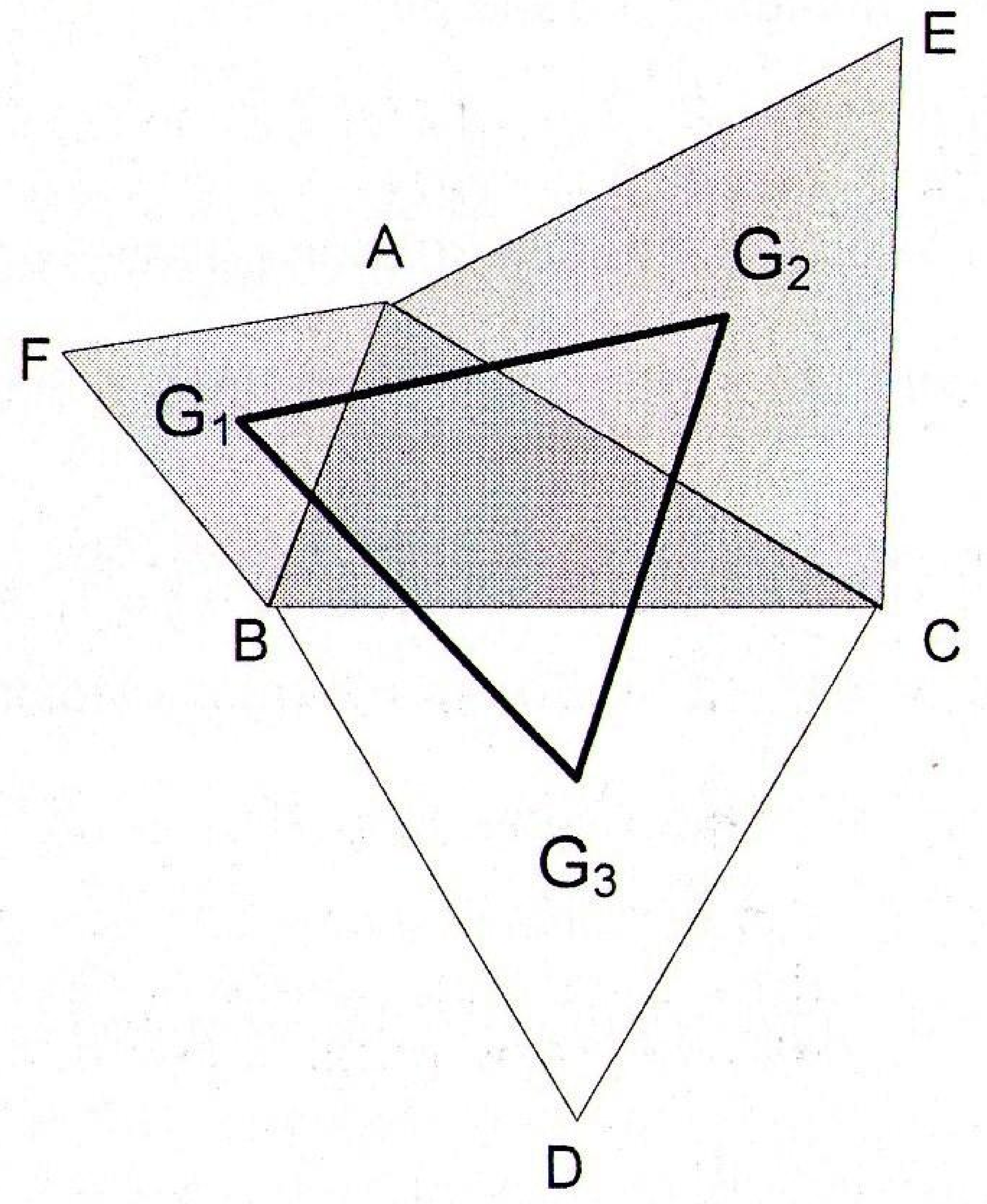
$$(\overline{A_1A_2}).(\overline{A_1A_3}).(\overline{A_1A_4}).....(\overline{A_1A_n}) = n$$

Exercício 2.9 – (Putnam 55) $A_1, A_2, \ldots A_n$ é um polígono regular inscrito em uma circunferência de raio *r* e centro *O*. *P* é um ponto sobre $\overrightarrow{OA_1}$. Mostre que:

$$\prod_{k=1}^{n} PA_k = OP^n - r^n.$$

Exercício 2.10 Utilize o resultado do desafio (Exercício 1.34) para mostrar que os ângulos agudos do triângulo retângulo 3, 4, 5 são irracionais quando expressos em graus.

Exercício 2.11 – (Teorema de Napoleão) Seja ABC um triângulo qualquer. Sejam BCD, ACE e ABF triângulos eqüiláteros externos do triângulo ABC. Prove que os baricentros dos triângulos BCD, ACE e ABF são vértices de um triângulo eqüilátero.



Exercício 2.12 Seja ABCD...PQ um polígono regular de n lados inscrito em um circulo de raio unitário. Calcule o produto das medidas das diagonais AC, AD,...,AP.

Exercício 2.13 (ITA 03) Determine o conjunto dos números complexos z para os quais o número w pertence ao conjunto dos Reais. Interprete o conjunto geometricamente.

$$w = \frac{z + \bar{z} + 2}{\sqrt{|z-1| + |z+1| - 3}}$$

Exercício 2.14 (ITA 06) Determine o conjunto A dos complexos z tais que:

$$\frac{\bar{z}}{z-2i} + \frac{2z}{\bar{z}+2i} = 3 \quad \text{e} \quad 0 < |z-2i| \le 1$$

Exercício 2.15 (Lidski) Considere os complexos z tais que: $\left|z+z^{-1}\right|=1$. Determine o valor máximo de módulo de z.

Exercício 2.16 Considere o conjunto dos complexos z tais que: $|z-2+3i|=1$. Determine o valor do módulo do complexo z pertencente a esse conjunto que possua: (a) argumento mínimo (b) módulo máximo.

Exercício 2.17 Considere o conjunto A dado por:

$$A=\left\{z\in\mathbb{C}\mid \arg(z)\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\ ;\ 1<|z|<2;\ \operatorname{Im}(z)>0\right\}.$$

Determine geometricamente o conjunto das imagens de z.(1+i) + 3 .

Exercício 2.18 Resolva com um argumento geométrico o Exercício 1.11 do primeiro capítulo.

Exercício 2.19 Seja z um complexo tal que $|z-1|=1$, e considere os complexos v e w tais que: $w=z^2-z$ e $3\arg v=2\arg w$. Mostre que:

$$\left(\frac{zv}{w}\right)^2\in\mathbb{R}$$

Exercício 2.20 Determine o lugar geométrico das imagens dos complexos z tais que:

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right|=k\in\mathbb{R}-\{1\}$$

Exercício 2.21 Determine os possíveis lugares geométricos das imagens das raízes da equação em z:

$$u.(z-a)^4+v.(z-b)^4=0\ ,\ u,v,z,a,b\in\mathbb{C}$$

Exercício 2.22 Sendo z um complexo não nulo, determine o lugar geométrico das imagens de z para que: $z+z^{-1}\in\mathbb{R}$. Resolva analiticamente e geometricamente.

Exercício 2.23 Considere um subconjunto A dos complexos z tais que $|z-3|=2$. Sendo z pertencente a A, calcule o valor mínimo e o valor máximo de:

$$\left|\frac{z-3+i}{z-3-i}\right|$$

Exercício 2.24 Dê o conjunto solução dos complexos z que atendem a:

$$|z|=\frac{4}{|z|}=|z-3|$$

Exercício 2.25 Demonstre, usando um argumento geométrico, a relação já mostrada no capítulo 1 (Fórmula 1.3.2)

$$1-\operatorname{cis}\theta=-2.i.\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right).\operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Exercício 2.26 Mostre que a área do triângulo definido por dois vetores representantes dos complexos z e w é dada por:

$$\operatorname{Area}(z,w)=\frac{|\operatorname{Im}(\bar{z}.w)|}{2}$$

Utilize o resultado para encontrar a área do triângulo com vértices em –4–i, 1+2i , 4–3i.

Exercício 2.27 (IME) - (Problema que motivou a capa do livro ☺)

Um velho manuscrito descrevia a localização de um tesouro enterrado: "*Há somente duas árvores, A e B em um terreno plano, e um canteiro de tomates. A é uma mangueira e B é uma jaboticabeira. A partir do centro K do canteiro, ande em linha reta até a mangueira medindo os seus passos. Vire 90 graus à esquerda e percorra a mesma distancia medida até o ponto C. Volte ao Canteiro. Ande medindo a distancia em linha reta até a jaboticabeira. Vire 90 graus a direita e percorra a mesma distancia até o ponto D. O tesouro está no ponto medio T do segmento CD.*"

Um aventureiro achou o manuscrito, identificou as árvores mas, como o canteiro desaparecera com o passar do tempo, não conseguiu localizá-lo, e desistiu da busca. O aluno Sá Bido, do IME, nas mesmas condições, diz que seria capaz de localizar o tesouro.

Mostre como você resolveria o problema, isto é, dê as coordenadas de T em função das coordenadas de A = (5,3) e B = (8,2).

Capítulo 3 – Números Complexos Aplicação em Somatórios

Neste capítulo apresentaremos mais uma aplicação de números complexos em possíveis situações de questão tanto do IME quanto do ITA. A dificuldade do assunto está em saber exatamente quando utilizar a ferramenta apresentada para resolver problemas de 'somatórios', que não são resolvidos convencionalmente usando números complexos.

3.1 Somatórios Binomiais

Algo interessante que podemos retirar das propriedades de números complexos é a propriedade cíclica de suas potências. Em ciclos de quatro potências o numero complexo i^n se repete.

$$i^0 = i^4 = i^8 = i^{12} = ... = 1$$
$$i^1 = i^5 = i^9 = i^{13} = ... = i$$
$$i^2 = i^6 = i^{10} = i^{14} = ... = -1$$
$$i^3 = i^7 = i^{11} = i^{15} = ... = -i$$

Vejamos como podemos tirar proveito disso. Vamos analisar o desenvolvimento binomial conhecido como Binômio de Newton:

$$(1+x)^n = C_n^0.(x)^0 + C_n^1.(x)^1 + C_n^2.(x)^2 + ... + C_n^n.(x)^n$$

Dessa expressão do Binômio de Newton, podemos tirar algumas importantes propriedades, também conhecidas como os teoremas do triângulo de Pascal.

Fazendo $x = 1$ na expressão do binômio:

$$(1+1)^n = C_n^0.(1)^0 + C_n^1.(1)^1 + C_n^2.(1)^2 + ... + C_n^n.(1)^n$$

De onde segue o importante resultado, conhecido, como **Teorema das Linhas** do triângulo de Pascal.

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$$

Resultado 3.1.1

Analogamente, fazendo $x = -1$ na expressão do binômio:

$$(1-1)^n = C_n^0.(-1)^0 + C_n^1.(-1)^1 + C_n^2.(-1)^2 + ... + C_n^n.(-1)^n$$

De onde segue mais um importante resultado:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + -... + (-1)^n C_n^n = 0$$

Resultado 3.1.2

Somando os dois últimos resultados 3.1.1 e 3.1.2, e dividindo por 2 nos dois membros da soma, temos ainda:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = 2^{n-1}$$

Resultado 3.1.3

Da mesma forma, subtraindo os mesmos resultados 3.1.1 e 3.1.2, e dividindo por 2 nos dois membros da soma, temos também:

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1}$$

Resultado 3.1.4

OBS: *Usamos as reticências (...) para representar os demais binomiais da mesma seqüência (<u>cuidado</u> para não achar que existem infinitos termos nessa sequência). Continuaremos a usar essa notação nos próximos exemplos.*

Calma, Sr. Guarda! Note que obtivemos facilmente a soma de binomiais tomados a números pares e a números ímpares. Será que sabemos calcular as seguintes somas de binomiais tomados em seqüências de ciclos de quatro?

$$C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots = ?$$
$$C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots = ?$$

É aí que entram os nossos números complexos (respondendo à dúvida do nosso amigo)! Ora, desejamos valores de x que se repetem em ciclos de 4. Alguém se habilita a sugerir uma saída?

Boa sugestão! Fazendo $x = i$ na expressão do binômio:

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= C_n^0.(i)^0 + C_n^1.(i)^1 + C_n^2.(i)^2 + \ldots + C_n^n.(i)^n \\ &= C_n^0 + C_n^1.(i) + C_n^2.(-1) + C_n^3.(-i) + \ldots \\ &= \left(C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + - \ldots\right) + i.\left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + - \ldots\right)\end{aligned}$$

De onde segue dois novos resultados:

$$\begin{cases} C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + - \ldots = \operatorname{Re}(1+i)^n & \text{(I)} \\ C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + - \ldots = \operatorname{Im}(1+i)^n & \text{(II)} \end{cases}$$

Lembrando que: $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}.\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^n = (2)^{n/2}.\text{cis}\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

Podemos explicitar matematicamente as partes real e imaginária de $(1+i)^n$:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(1+i)^n = (2)^{n/2}.\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ \operatorname{Im}(1+i)^n = (2)^{n/2}.\text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Voltando no resultado do binômio de Newton (em I e II):

$$\begin{cases} C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + - \ldots = (2)^{n/2}.\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + - \ldots = (2)^{n/2}.\text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Resultado 3.1.5

Juntaremos esses dois novos resultados, respectivamente, com os dois resultados 3.1.3 e 3.1.4 (já mostrados).

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1}$$
$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$$

Somando os resultados correspondentes e dividindo por dois a soma, chegamos aos resultados finais:

$$C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots = 2^{n-2} + (2)^{(n-2)/2}.\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + C_n^{13} + \ldots = 2^{n-2} + (2)^{(n-2)/2}.\text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Resultado 3.1.6

Temos então, no momento, ferramentas para calcular somatórios binomiais com repetições em ciclos de 2, e de 4.

Autor: *A pergunta é muito pertinente. Podemos dizer que um método matemático para a resolução de questões é eficiente quando conseguimos estender o seu conceito às mais diversas situações, como é o nosso caso agora.*

Suponhamos que desejemos achar uma expressão matemática simplificada para o somatório dos binomiais repetindo em ciclos de 3.

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = ?$$

Procuramos um número que se repita em potências de 3. Ou seja, procuramos um número z, tal que

$$z^0 = z^3 = z^6 = \ldots$$

Ou ainda:

$$z^3 = 1$$

Ora, nós conhecemos os complexos que possuem essa propriedade, e, inclusive, já os estudamos! Basta tomar z como sendo uma das raízes triplas da unidade.

$$z = \text{cis}\left(\frac{2.k.\pi}{3}\right), \quad k = 0,1,2$$

Ou seja, é aconselhável que analisemos o comportamento do desenvolvimento de Newton, para o binômio, por exemplo:

$$\left(1 + \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^n$$

A soma acima foi pedida justamente em uma prova do IME do ano de 2005, e encontra-se na lista de exercícios na seção 3.3 (Exercício 3.4). Sua resolução pode ser encontrada no capítulo 7.

3.2 Outras Somas

Vimos na seção anterior que somatórios muitas vezes estão ligados aos números complexos. As resoluções de questões envolvendo esses somatórios se baseiam na forma trigonométrica da representação de um complexo e se utilizam das suas propriedades (Lei de De Moivre, por exemplo).

É comum vermos também progressões geométricas como sendo a saída de problemas do mesmo gênero. Vejamos um exemplo a seguir:

Exemplo 3.2.a (Spiegel)

Determine o valor da soma, para n natural, tal que n > 1:

$$S = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \text{sen}\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \text{sen}\left(\frac{6\pi}{n}\right) + \ldots + \text{sen}\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

Solução:

Os termos do somatório são funções seno com o argumento crescendo em progressão aritmética. A experiência adquirida na seção anterior nos sugere analisar a seguinte soma:

$$A = cis\left(\frac{2\pi}{n}\right) + cis\left(2.\frac{2\pi}{n}\right) + cis\left(3.\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + cis\left((n-1).\frac{2\pi}{n}\right)$$

Ora, pela Lei de De Moivre a soma A torna-se:

$$A = \left(cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) + \left(cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^2 + \left(cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^3 + \ldots + \left(cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^{n-1}$$

Sendo: $z = cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

Temos: $A = z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n-1}$

Note que a soma A é exatamente uma soma de termos em progressão geométrica de razão z.

$$A = z.\left(\frac{z^{n-1}-1}{z-1}\right) = \left(\frac{z^n - z}{z-1}\right)$$

Da Lei de De Moivre: $z = cis\left(\frac{2\pi}{n}\right) \Rightarrow z^n = 1$

Portanto $A = \left(\frac{1-z}{z-1}\right) = -1$ para $n > 1$

Ora, pela construção da resolução, sabemos que a soma pedida S é justamente a parte imaginária de A, que é nula

$$S = sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) + sen\left(\frac{4\pi}{n}\right) + sen\left(\frac{6\pi}{n}\right) + \ldots + sen\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0$$

Exemplo 3.2.b (SBM)

Determine o valor da soma, ligeiramente diferente da anterior para n natural:

$$S = sen\left(\frac{\pi}{n}\right) + sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) + sen\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \ldots + sen\left(\frac{n\pi}{n}\right)$$

Solução:

$$A = cis\left(\frac{\pi}{n}\right) + cis\left(\frac{2\pi}{n}\right) + cis\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \ldots + cis\left(\frac{n\pi}{n}\right)$$

Procedendo da mesma forma que no exemplo anterior, pela Lei de De Moivre a soma A torna-se:

$$A = \left(cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) + \left(cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2 + \left(cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^3 + \ldots + \left(cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^n$$

Sendo: $z = cis\left(\frac{\pi}{n}\right)$, temos: $A = z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n = z.\left(\frac{z^n - 1}{z-1}\right)$

$$A = cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\left[\frac{\left(cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^n - 1}{\left(cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) - 1}\right] = cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\left[\frac{\left(cis\left(n.\frac{\pi}{n}\right)\right) - 1}{\left(cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) - 1}\right] = cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\left[\frac{-1-1}{\left(cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) - 1}\right]$$

$$= \frac{2.cis\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1 - \left(cis\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} \overset{Form.1.3.2}{=} \frac{2.cis\left(\frac{\pi}{n}\right)}{-2.i.sen\left(\frac{\pi}{2n}\right)cis\left(\frac{\pi}{2n}\right)} =$$

$$= i.\frac{cis\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = i.\frac{cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

$$= i.ctg\left(\frac{\pi}{2n}\right) - 1$$

Note que queremos justamente a parte imaginária de A, e, portanto:

$$S = sen\left(\frac{\pi}{n}\right) + sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) + sen\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \ldots + sen\left(\frac{n\pi}{n}\right) = ctg\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

Vamos agora mostrar uma **Segunda Solução** para o exemplo que acabamos de ver, utilizando um diferente método de resolução.

Da Fórmula 1.4.2, temos: $sen\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2.i}$ $\therefore$ $sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{e^{\frac{i\pi}{n}} - e^{-\frac{i\pi}{n}}}{2.i}$

Sendo $w = e^{\frac{i\pi}{n}}$, temos que o somatório pedido é:

$$S = \sum_{k=0,\dots,n} \text{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0,\dots,n} \frac{w^k - w^{-k}}{2.i} = \underbrace{\sum_{k=0,\dots,n} \frac{w^k}{2.i}}_{PG} - \underbrace{\sum_{k=0,\dots,n} \frac{w^{-k}}{2.i}}_{PG}$$

Usando a expressão da soma da P.G. nos dois somatórios:

$$S = \frac{1}{2i}\left(\frac{w^n - 1}{w-1} - \frac{w^{-n}-1}{w^{-1}-1}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{-1-1}{w-1} - \frac{-1-1}{w^{-1}-1}\right)$$

$$= \frac{-2}{2i}\left(\frac{1}{w-1} - \frac{1}{w^{-1}-1}\right) = i.\left(\frac{1}{w-1} - \frac{w}{1-w}\right) = i.\left(\frac{1}{w-1} + \frac{w}{w-1}\right)$$

$$= i.\left(\frac{w+1}{w-1}\right) = i.\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}+1}{e^{\frac{i\pi}{n}}-1}\right)$$

Note que, embora já tenhamos achado uma resposta, a expressão final não ficou muito parecida com o resultado que encontramos na primeira solução: $\text{ctg}\left(\pi/_{2n}\right)$. Vamos tentar torná-la parecida.

Usando uma simplificação básica:

$$S = i.\left(\frac{w+1}{w-1}\right) = i.\left(\frac{w^{1/2} + w^{-1/2}}{w^{1/2} - w^{-1/2}}\right)$$

Podemos agora escrever S de forma a chegar a um resultado esteticamente igual ao resultado obtido na primeira solução:

$$S = i.\left(\frac{w^{1/2} + w^{-1/2}}{w^{1/2} - w^{-1/2}}\right) = \left(\frac{\frac{e^{i\pi/2n} + e^{-i\pi/2n}}{2}}{\frac{e^{i\pi/2n} + e^{-i\pi/2n}}{2.i}}\right) = \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right) = \text{ctg}\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$S = \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) + \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \dots + \text{sen}\left(\frac{n\pi}{n}\right) = \text{ctg}\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

Exemplo 3.2c (SBM) Prove que: $\text{sen}\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \text{sen}\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \text{sen}\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Solução:

Vamos chamar: $w = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{7}\right)$.

Conhecemos a soma das raízes sétimas da unidade:

$$1 + \text{cis}\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \text{cis}\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \text{cis}\left(\frac{6\pi}{7}\right) + \dots + \text{cis}\left(\frac{12\pi}{7}\right) = 0$$

Podemos ainda reescrever essa soma, lembrando que:

$$1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^6 = 0$$

$$\therefore \quad 1 + \underbrace{\left(w + w^2 + w^4\right)}_{A} + \underbrace{\left(w^3 + w^5 + w^6\right)}_{B} = 0$$

O problema se resume a determinar A e B. Vamos calcular algumas coisas interessantes:

$$\begin{cases} \text{(i)} \ A + B = -1 \\ \text{(ii)} \ A.B = w^4 + w^6 + w^7 + w^5 + w^7 + w^8 + w^7 + w^9 + w^{10} \\ \qquad = w^4 + w^6 + 3 + w^5 + w + w^2 + w^3 \\ \qquad = 2 + \left(\cancel{1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6}\right)^{=0} \end{cases}$$

Ou ainda, como B é a soma de termos nos quadrantes III e IV do plano:

$$\begin{cases} \text{(i)} \ A + B = -1 \\ \text{(ii)} \ A.B = 2 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} A = \dfrac{-1 + i.\sqrt{7}}{2} \\ B = \dfrac{-1 - i.\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

A soma pedida é justamente a parte imaginária de A.

$$\text{sen}\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \text{sen}\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \text{sen}\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Exemplo 3.2d Sendo $z = \frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}$, calcule: $\sum_{k=1}^{11} z^k$

Solução:

Passando z para forma trigonométrica, temos: $z = \text{cis}(\pi/3)$. A soma pedida é a soma de termos em progressão geométrica:

$$z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{11} = z.\left(\frac{z^{11}-1}{z-1}\right) = \left(\frac{z^{12}-z}{z-1}\right)$$

$$= \left(\frac{\text{cis}\frac{12\pi}{3} - \text{cis}\frac{\pi}{3}}{\text{cis}\frac{\pi}{3} - 1}\right) = \left(\frac{1 - \text{cis}\frac{\pi}{3}}{\text{cis}\frac{\pi}{3} - 1}\right)$$

$$= -1$$

3.3 Interpretação Geométrica

Essas somas que vimos acima podem ser interpretadas também geometricamente. É curioso o fato de que a soma de números complexos em progressão geométrica pode dar um resultado tão simples.

Vamos analisar o que está ocorrendo geometricamente na soma do Exemplo 3.2d.

O primeiro termo da soma é $z = \text{cis}(\pi/3)$ (i.e., um vetor de comprimento unitário e argumento igual a 60°).

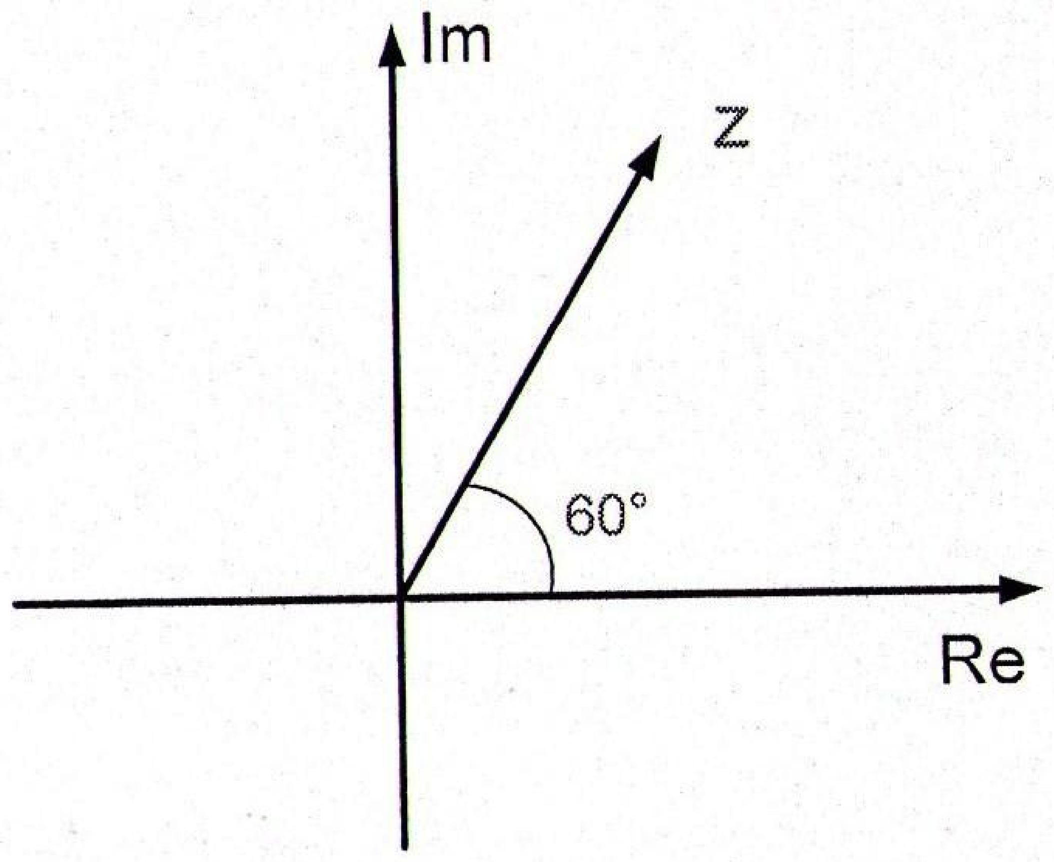


Fig. 3.3.1

Cada outro termo da soma nada mais é do que o anterior multiplicado por $z = \text{cis}(\pi/3)$. Vimos no capítulo anterior que isso significa rotacionar o vetor do complexo anterior de 60° no sentido trigonométrico.

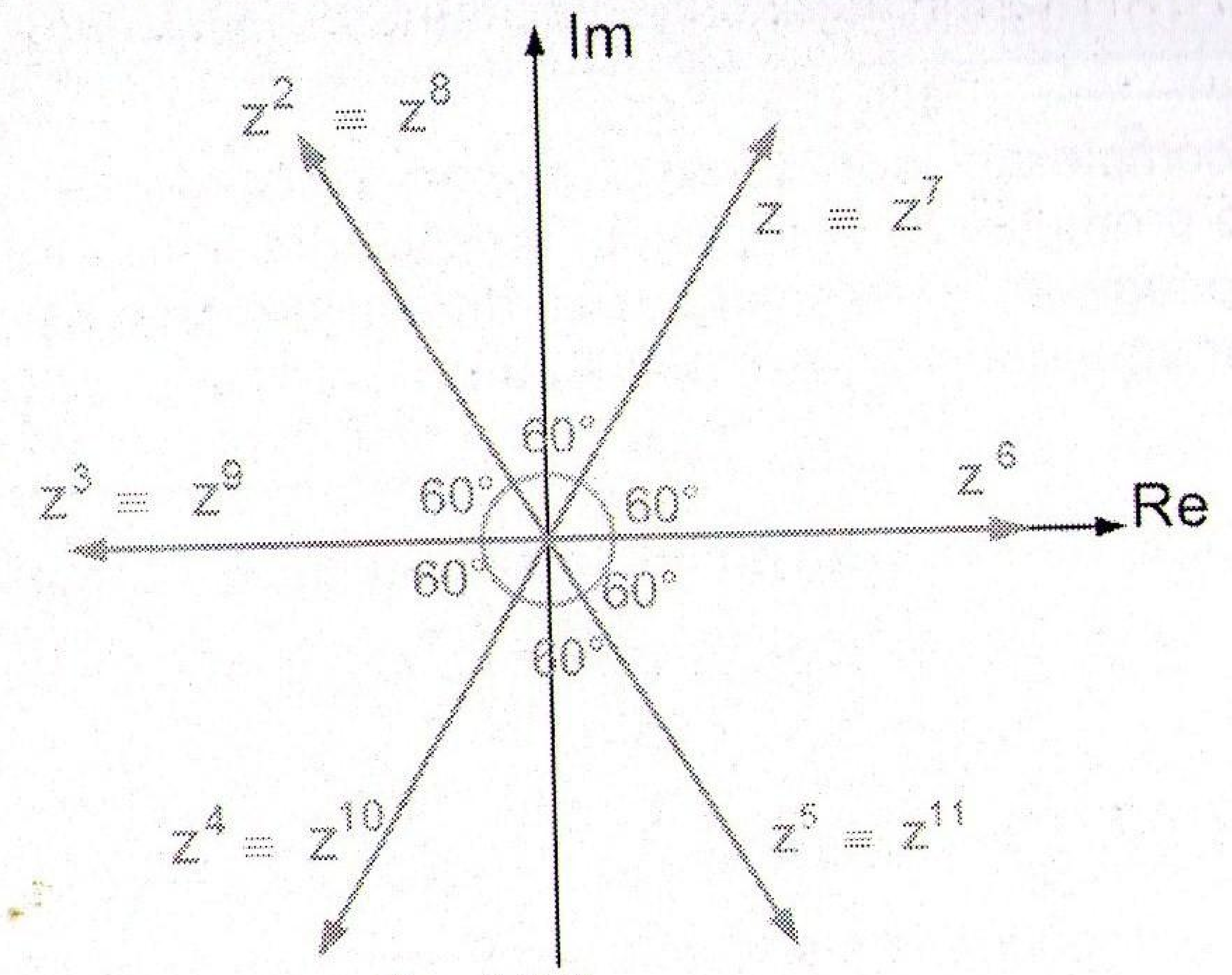


Fig. 3.3.2

Note que a soma desses vetores terá muitos cancelamentos (no caso dos vetores de mesmo módulo, direção, porém com sentidos contrários). Após todos os cancelamentos possíveis, sobrará um vetor (que não pôde ser cancelado por nenhum outro vetor com sentido contrário), como mostra a figura 3.3.3:

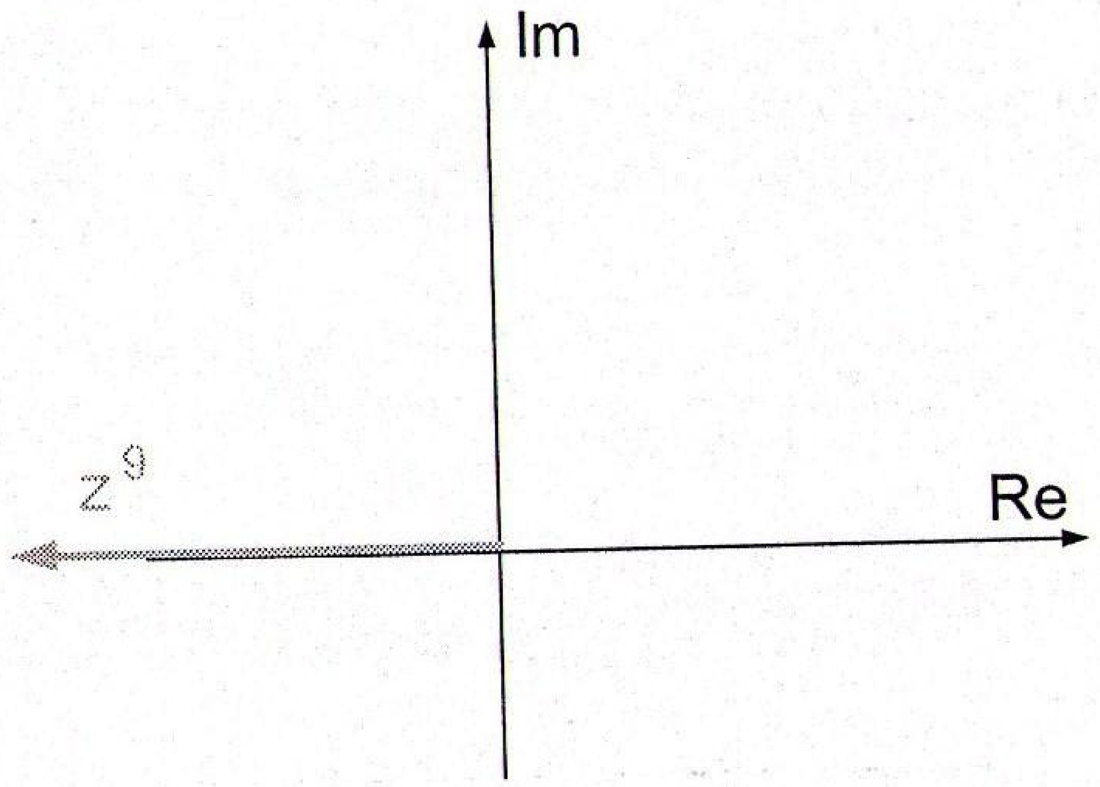


Fig. 3.3.3

Portanto a soma resultante é um vetor de argumento igual a 180° e módulo unitário. É consistente, então o fato de que a soma pedida seja:

$$z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{11} = -1$$

3.4 Produtórios

Números complexos podem nos ajudar também em algumas questões envolvendo produtórios. Vamos ilustrar isso com um exemplo resolvido, para que então o raciocínio possa ser aplicado similarmente pelo aluno caso tenha de enfrentar uma questão do mesmo tipo.

Exemplo 3.4.a. Sendo n um natural maior ou igual a 2, mostre que:

$$\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\left(1-\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)\right)\ldots\left(1-\cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right)=\frac{n^2}{2^{n-1}}$$

Solução:

No capítulo 1, deduzimos a seguinte expressão (*Fórmula 1.6.2*):

$$\left(z-\text{cis}\frac{2\pi}{n}\right)\left(z-\text{cis}\frac{4\pi}{n}\right)\ldots\left(z-\text{cis}\frac{2.(n-1)\pi}{n}\right)=1+z+z^2+z^3+\ldots+z^{n-1}$$

Fazendo $z=1$:

$$\left(1-\text{cis}\frac{2\pi}{n}\right)\left(1-\text{cis}\frac{4\pi}{n}\right)\ldots\left(1-\text{cis}\frac{2.(n-1)\pi}{n}\right)=\left(1+1^2+1^3+\ldots+1^{n-1}\right)=n \quad \text{(i)}$$

A "grande sacada" da solução está no seguinte passo. A partir da identidade anterior, vamos achar o conjugado de ambos os membros da igualdade.

$$\overline{\left(1-\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\left(1-\text{cis}\left(\frac{4\pi}{n}\right)\right)\ldots\left(1-\text{cis}\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right)}=\overline{n}$$

Form. 1.2.5

$$\Rightarrow \overline{\left(1-\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)}\,\overline{\left(1-\text{cis}\left(\frac{4\pi}{n}\right)\right)}\ldots\overline{\left(1-\text{cis}\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right)}=\overline{n}$$

$$\Rightarrow \left(1-\text{cis}\left(-\frac{2\pi}{n}\right)\right)\left(1-\text{cis}\left(-\frac{4\pi}{n}\right)\right)\ldots\left(1-\text{cis}\left(-\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right)=\overline{n}=n \quad \text{(ii)}$$

Temos então as duas equações:

$$\begin{cases}\text{(i)}: \left(1-\text{cis}\frac{2\pi}{n}\right)\left(1-\text{cis}\frac{4\pi}{n}\right)\ldots\left(1-\text{cis}\frac{2.(n-1)\pi}{n}\right)=n\\ \text{(ii)}: \left(1-\text{cis}\left(-\frac{2\pi}{n}\right)\right)\left(1-\text{cis}\left(-\frac{4\pi}{n}\right)\right)\ldots\left(1-\text{cis}\left(-\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right)=n\end{cases}$$

Multiplicando as duas:

$$\left(1-\text{cis}\frac{2\pi}{n}\right)\left(1-\text{cis}\left(-\frac{2\pi}{n}\right)\right)\ldots\left(1-\text{cis}\frac{2.(n-1)\pi}{n}\right)\left(1-\text{cis}\left(-\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right)=n^2$$

Percebendo que, a cada 2 termos do produto, temos algo do tipo:

$$(1-\text{cis}\theta)(1-\text{cis}(-\theta))=2-(\text{cis}\theta+\text{cis}(-\theta))=2-2.\cos\theta$$

Aplicando isso no produto:

$$\left(2-2.\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(2-2\cos\frac{4\pi}{n}\right)\ldots\left(2-2\cos\frac{2.(n-1)\pi}{n}\right)=n^2$$

$$\Rightarrow 2^{n-1}.\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right).\left(1-\cos\frac{4\pi}{n}\right)\ldots\left(1-\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=n^2$$

Portanto:

$$\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right).\left(1-\cos\frac{4\pi}{n}\right)\ldots\left(1-\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{n^2}{2^{n-1}}$$

3.5 Exercícios de Fixação

Exercício 3.1 Considere o seguinte desenvolvimento:

$$(1+x+x^2)^n = A_0 + A_1.x + A_2.x^2 + \ldots + A_{2n}.x^{2n}$$

Determine expressões matemáticas simplificadas para as seguintes somas:

a) $A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{2n}$

b) $A_0 + A_2 + A_4 + \ldots + A_{2n}$

c) $A_1 + A_3 + A_5 + \ldots + A_{2n-1}$

d) $A_0 - A_2 + A_4 - A_6 + - \ldots$

e) $A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + - \ldots$

f) $A_0 + A_4 + A_8 + \ldots$

Exercício 3.2 Calcule uma expressão matemática para a soma:

$$C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + C_n^{14} \ldots = ?$$

Exercício 3.3 Faça o mesmo para a soma:

$$C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + C_n^{15} \ldots = ?$$

Exercício 3.4 (IME-05) Sejam as somas S_0 e S_1 definidas por:

$$S_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots + C_n^{3\lfloor n/3 \rfloor}$$

$$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \ldots + C_n^{3\lfloor (n-1)/3 \rfloor + 1}$$

Calcule o valor de S_0 e S_1 em função de n, sabendo que $\lfloor r \rfloor$ representa o maior inteiro menor ou igual a r. *Sugestão: utilize o desenvolvimento do binômio de Newton para*

$$\left(1 + \text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^n$$

Exercício 3.5 (ITA 95 – adaptada) Para cada n pertencente aos naturais, quanto vale a seguinte soma ?

$$1 - C_{4n}^2 + C_{4n}^4 - \ldots - C_{4n}^{4n-2} + 1$$

Exercício 3.6 Determine uma expressão matemática simples, em função de x para a seguinte soma:

$$C_n^1.\text{sen}(x) + C_n^2.\text{sen}(2x) + C_n^3.\text{sen}(3x) + \ldots + C_n^n.\text{sen}(n.x)$$

Exercício 3.7 Mostre (sem necessariamente utilizar números complexos) :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2.C_n^k = n.2^{n-1} + n.(n-1).2^{n-2}$$

Exercício 3.8 Faça o mesmo para a soma, com k sendo tomado em grupos de 4:

$$\sum_{k=0,4,8,\ldots} k^2.C_n^k$$

Exercício 3.9 Mostre (sem necessariamente utilizar números complexos):

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1).C_n^k = n.2^{n-1} + 2^n$$

Exercício 3.10 Faça o mesmo para a soma, com k sendo tomado em grupos de 4:

$$\sum_{k=1,5,9,\ldots} (k+1).C_n^k$$

Exercício 3.11 Mostre (sem necessariamente utilizar números complexos):

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

Exercício 3.12 Faça o mesmo para a soma, com k sendo tomado em grupos de 4:

$$\sum_{k=0,4,8,\ldots}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$$

Exercício 3.13 (Spiegel) Mostre que:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = -1$$

Exercício 3.14 Determine uma expressão simples para as somas:

a) $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \ldots + \cos(nx)$

b) $\text{sen}(x) + \text{sen}(2x) + \text{sen}(3x) + \ldots + \text{sen}(nx)$

Exercício 3.15 – (ITA 04) Sendo $z = \frac{1}{\sqrt{2}}.(1+i)$, calcule:

$$\left|\sum_{k=1}^{60} z^k\right| = \left|z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{60}\right|$$

Exercício 3.16 Interprete geometricamente o resultado da soma da questão anterior.

Exercício 3.17 Calcule: $\text{Im}\left(1 + 2i + 3.i^2 + 4.i^3 + \ldots + 2004.i^{2003}\right)$

Exercício 3.18 (Spiegel) Calcule:

$$\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\left(\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\left(\text{sen}\left(\frac{3\pi}{n}\right)\right)\ldots\left(\text{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right)$$

Exercício 3.19 (ITA – adaptada) Sejam x e y números reais tais que:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$$

Então o número complexo x+ i.y é tal que z^3 e $|z|$ valem?

Exercício 3.20 A partir dos resultados do Exercício 2.8, usando um argumento geométrico, determine novamente o valor do produto:

$$\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\left(\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\left(\text{sen}\left(\frac{3\pi}{n}\right)\right)\ldots\left(\text{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right)$$

Capítulo 4 – Polinômios

4.1 A História dos Polinômios

Ao longo da história da humanidade, um dos problemas mais fascinantes entre os matemáticos antigos era o de resolver equações polinomiais. Para que valores de x, por exemplo, seria satisfeita a equação:

$$x^2 - 5x + 6 = 0\,?$$

A solução de equações do 2º grau creditadas ao hindu Báskara é na verdade, de autoria de Sridahara, do século XI, também hindu. Os hindus participaram com um grande papel na matemática, junto aos árabes, uma vez que uma das grandes potências da matemática, a Grécia antiga, estagnou-se em suas pesquisas durante à invasão de seu território pelo Império Romano.

Uma das grandes discussões matemáticas registradas na história é a ocorrida entre os matemáticos italianos Girolamo Cardano e Nicoló Fontana, mais conhecido como Tartaglia (Tartaglia traduzido a português significa "gago", apelido dado ao matemático devido aos seus distúrbios de fala) em meados do século XVI. Naquela época eram comuns publicações anuais de matemática, nos quais as mentes brilhantes da Europa propunham desafios a outros matemáticos. Publicações essas que faziam crescer o nome de muitos matemáticos que conhecemos historicamente hoje, como Newton, irmãos Bernouilli, Leibniz, entre outros.

A história diz que no início do século XVI o matemático Scipione del Ferro descobriu uma solução para a equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, porém faleceu antes de publicá-la. Seu discípulo, Antonio Fior, conhecia o método e resolveu publicar em uma dessas edições anuais o desafio, afim de engrandecer seu nome perante os matemáticos contemporâneos. O desafio constava em dar as soluções numéricas de equações do tipo que del Ferro havia estudado.

O matemático Tartaglia, um humilde matemático de origem pobre, aceitou o desafio e respondia todos com respostas diretas e precisas a respeito das raízes, porém não revelava seu método de obtenção das mesmas. Por mais que Fior ousava desafiar Tartaglia, a resposta vinha sempre com precisão por parte do matemático com distúrbio de fala.

Para finalizar a humilhação para cima de Fior, Tartaglia propôs um desafio ao mesmo que era de resolver equações do tipo: $x^3 + n.x^2 + px + q = 0$. Ao matemático Fior, que não tinha méritos o suficiente para responder ao

desafio, restou aceitar a humilhação perante todos os matemáticos contemporâneos.

Nicolo Fontana Tartaglia

Nesta mesma época, Girolamo Cardano, também italiano, estava escrevendo um trabalho de Álgebra, e solicitou a Tartaglia que revelasse o método de resolução das equações do 3º grau para que fosse publicado, com os devidos créditos, no seu livro. Tartaglia recusou, alegando que iria publicar ele mesmo o método. Cardano era conhecido por sua "falsidade", mas mesmo assim conseguiu convencer (sob juras de que seria devidamente creditado) o matemático Tartaglia a revelar a solução. Quebrando sua promessa, em meados do século, surgiu a publicação *Ars Magna* contendo a solução das equações do 3º grau sem menção alguma ao seu conterrâneo.

Com a solução de equações cúbicas conhecida, um grande problema na matemática surgiu (refira-se à introdução histórica dada aos Números Complexos no capítulo 1 deste livro) quando os matemáticos pararam para analisar melhor a solução de Cardano-Tartaglia para equações do 3º grau: $x^3 = a.x + b$.

A solução vinda do matemático italiano dizia que:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Até o momento não era tido como algo matematicamente verdadeiro a raiz quadrada de números negativos, de modo que equações como $x^3 = 15.x + 4$, não apresentassem soluções de interpretação matemática concreta, uma vez que de acordo com a solução de Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Desta forma criou-se em paralelo ao estudo das equações algébricas polinomiais, o estudo dos Números Complexos.

Com a teoria sólida a respeito dos números complexos vista nos capítulos 1 a 3 deste livro, poderemos iniciar uma caminhada agora em direção aos Polinômios. Começaremos devagar e com o passar das Seções introduziremos conceitos que são exclusivos de provas do estilo IME/ITA.

4.2 Introdução – Raízes de um Polinômio

Uma função é dita polinomial quando ela é expressa da seguinte forma:

$$P(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_n.x^n$$

Onde a_0, a_1, a_2,...,a_n são constantes complexas (reais ou não) e onde os expoentes de x são todos números naturais.

Se P(x) é uma função que tenha como domínio e imagem um subconjunto dos reais, diremos que o polinômio é Real. Isto é, se x puder assumir apenas valores reais e a_0, a_1, a_2,...,a_n forem reais, P(x) será dito um Polinômio Real. Essa notação será utilizada muitas vezes no decorrer dos próximos capítulos.

Definição: Dizemos que o grau do polinômio é dado pela ordem do maior expoente com coeficiente não nulo.

Definição 4.2.1

Exemplos:

$$\begin{cases} \text{grau } 5: P(x) = 1 + x + 2x^2 - 4x^5 \\ \text{grau } 2: P(x) = 1 + 2x + x^2 \\ \text{grau } 3: P(x) = x^3 \\ \text{grau } 1: P(x) = i + x \\ \text{grau } 0: P(x) = \pi \end{cases}$$

Curiosidade:
Se o grau é dado pela ordem do maior expoente com coeficiente não-nulo, qual é o grau do polinômio P(x)=0, que não possui coeficientes não nulos?

Para manter a coerência da nossa definição é conveniente dizer que o polinômio nulo, $P(x) = 0$, não possui grau. Isso não impede, no entanto, outros autores de tomarem outra convenção (desde que uma ressalva seja feita na definição do grau do polinômio).

Identidade de Polinômios

O termo 'identidade' já apareceu quando estudamos os Números Complexos. Em termos gerais, uma identidade é um tipo de igualdade (denotado pelo símbolo $\equiv$). Dizemos que duas expressões dependentes de uma variável independente x, por exemplo, são idênticas quando elas devem ser satisfeitas para qualquer valor que x possa assumir.

Exemplo 4.2.a:
Determine as constantes a, b, c na identidade:

$$a.(x + 5y - 3z) + b.(2x - 2y + 5z) + c.(7x + 11y + 3z) + x - 2y \equiv 0$$

Solução:
Temos uma expressão do lado esquerdo da identidade, dependente das variáveis independentes x,y,z e deve ser "identicamente nulo" (i.e. para qualquer sejam os valores assumidos por x, y, z , a expressão deverá se anular).

$$a.(x + 5y - 3z) + b.(2x - 2y + 5z) + c.(7x + 11y + 3z) + x - 2y =$$
$$= a.x + 2b.x + 7c.x + x + 5a.y - 2b.y + 11c.y - 2 - 3a.z + 5b.z + 3c.z$$
$$= x.(a + 2b + 7c + 1) + y.(5a - 2b + 11c - 2) + z.(-3a + 5b + 3c)$$

Note que, se zerarmos as expressões dentro dos parênteses, independente do valor assumido por x, y e z, teremos que a expressão se anulará. É justamente isso que deveremos fazer!

$$x.\underbrace{(a + 2b + 7c + 1)}_{=0} + y.\underbrace{(5a - 2b + 11c - 2)}_{=0} + z.\underbrace{(-3a + 5b + 3c)}_{=0} \equiv 0$$

De onde segue:

$$\begin{cases} a + 2b + 7c + 1 = 0 \\ 5a - 2b + 11c - 2 = 0 \\ -3a + 5b + 3c = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, temos:

$$a = -\frac{37}{6};\ b = -5;\ c = \frac{13}{6}$$

Vamos ver como essa definição se aplica no caso dos nossos polinômios !

Definição:
Dois polinômios são ditos idênticos quando todos os seus coeficientes correspondentes são iguais.

Definição 4.2.2

Ilustrando a definição acima:

$$\underbrace{a_0 + a_1.x + \ldots + a_n.x^n}_{P(x)} \equiv \underbrace{b_0 + b_1.x + \ldots + b_n.x^n}_{Q(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ \ldots \\ a_n = b_n \end{cases}$$

Como conseqüência da definição 2.4.2 podemos ainda definir:

Definição:
Um polinômio é dito *Identicamente Nulo* quando e só quando todos seus coeficientes forem nulos.

Definição 4.2.3

Exemplo 4.2.b: Determine o valor de α, entre [0,2π] que torna identicamente nulo o polinômio P(x):

$$P(x) = \text{sen}\alpha.x^2 + 4.\cos\alpha.x - x^2$$

Solução:
Basta utilizarmos a definição 4.2.3:

$$P(x) = \text{sen}\alpha.x^2 + 4.\cos\alpha.x - x^2 \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}\alpha - 1 = 0 \\ 4.\cos\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}\alpha = 1 \\ \cos\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}}$$

Lembrando que utilizamos o valor de α que atendia à condição de identidade e à condição de pertencer ao intervalo dado no enunciado.

Raiz de um Polinômio

Definição:
Dizemos que um número α é raiz do polinômio P(x) quando P(α) = 0.

Definição 4.2.4

Em muitos casos, nos interessa determinar exatamente qual é a raiz (ou quais são as raízes) de um dado polinômio. É importante lembrar que nem sempre achar uma raiz para um dado polinômio será uma tarefa fácil. Vamos mostrar agora os métodos para achar as raízes de alguns tipos simples de polinômios.

I) Polinômios do 1º Grau
Nesse caso, uma simples manipulação algébrica resolve.

Ex: $P(x) = a.x + b$

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow a.\alpha + b = 0 \Leftrightarrow a.\alpha = -b \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -\frac{b}{a}, \ a \neq 0}$$

II) Polinômios do 2º Grau (Regra de Báskara)
A "álgebra" envolvida é um pouco mais rebuscada nesse caso, porém de fácil compreensão como é mostrado abaixo.

Ex: $P(x) = a.x^2 + b.x + c = 0 \quad , a,b,c \neq 0$

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow a.\alpha^2 + b.\alpha + c = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \frac{b}{a}.\alpha + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \frac{b}{a}.\alpha + \underline{\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)} + \frac{c}{a} = 0 + \underline{\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha^2 + \frac{b}{a}.\alpha + \frac{b^2}{4a^2}\right) = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4.a.c}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha + \frac{b}{2a}\right) = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}}$$

OBS: *O resultado acima, ensinado em geral no "Ensino Fundamental", já deve ser algo bastante conhecido do aluno. Caso você não seja familiar, é importante que leia e releia a dedução, bem como decore o resultado que dever "estar no sangue" de qualquer aluno que fará a prova de vestibular (ainda mais se tratando das provas do IME e do ITA).*

II) Polinômios do 3º Grau sem o termo do 2º grau (Regra de Cardano)

A partir do grau 3, fica mais difícil determinar algebricamente (sem o auxílio de outras condições do problema) as raízes para o *polinômio*, em geral. Veremos mais a frente (pedimos que por enquanto o leitor apenas acredite) que todo polinômio do 3º grau com coeficientes reais, admite pelo menos uma raiz real. A Regra de Cardano mostra que é possível determinar um algoritmo para achar essa raiz para um polinômio de 3º grau do tipo:

$$P(x) = x^3 + b.x + c \quad , b,c \in \mathbb{R}^*$$

Ex: $P(x) = x^3 + b.x + c \quad , b,c \in \mathbb{R}^*$

Vamos supor uma raiz real do tipo: $\alpha = u + v$ com u e v a serem determinados.

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (u+v)^3 + b.(u+v) + c = 0$$
$$\Leftrightarrow (u^3 + 3.u.v.(u+v) + v^3) + b.(u+v) + c = 0$$
$$\Leftrightarrow (u^3 + v^3) + (u+v).(3.u.v + b) + c = 0$$

Queremos achar u e v para que a igualdade acima seja satisfeita. Vamos tomar, por exemplo, u e v tais que:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -c \\ 3.u.v = -b \end{cases}$$

Para u e v acima, teremos $\alpha = u + v$ sendo raiz do polinômio. Podemos, ainda, escrever:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -c \\ u^3.v^3 = \dfrac{-b^3}{27} \end{cases}$$

Vamos denotar: $u^3 = p$, $v^3 = q$

$$\begin{cases} p + q = -c \\ p.q = \dfrac{-b^3}{27} \end{cases} \Rightarrow p + \left(-\frac{b^3}{27}\right).\frac{1}{p} = -c \Rightarrow p^2 + c.p - \frac{b^3}{27} = 0$$

Usando a "Regra de Báskara" para resolver a equação do 2º grau acima:

$$p = -\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}} \quad ; \quad q = -\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}$$

Voltando às variáveis u e v:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}} \quad ; \quad v = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}$$

E, com isso:

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}$$

Resultado 4.2.1

Volte à Seção 1.1 do Capítulo 1, para uma discussão histórica interessante envolvendo o resultado de Cardano-Tartaglia como contribuição para o início da discussão a respeito de números complexos.

Girolamo Cardano (1501-1576)

OBS Importante: *Por enquanto mostramos o método de resolução analítica de equações gerais do 1º e 2º grau e de equações do 3º grau, desde que não possuam termo de 2º grau. Mostraremos que se isso não acontecer (para o caso do polinômio do 3º grau), ainda há uma maneira de aplicar a fórmula de Cardano para encontrar as soluções. Limitar-nos-emos a resoluções analíticas para apenas esses tipos de polinômios. Existe ainda um método de solução analítica para polinômios do 4º grau (Método de Ferrari), que se utiliza de transformações algébricas e cai novamente na Solução de Cardano para Equações do 3º grau. Polinômios de graus maiores também terão*

soluções analíticas em alguns casos, porém desde que satisfaçam algumas outras condições específicas que estudaremos mais a frente!

Exemplo 4.2.c Ache as raízes do polinômio: $x^4+2x^2+4=0$

Solução:
Não conhecemos as ferramentas para calcular um polinômio do quarto grau de forma analítica. Na verdade, esse polinômio é um polinômio do 2º grau mascarado (esse tipo de equação é chamada *Equação Biquadrada*).

Note que a transformação $y = x^2$ transforma-o em um polinômio do segundo grau:

$$(x^2)^2+2.(x^2)+4=0 \quad \therefore \quad y^2+2y+4=0$$

Conhecemos a solução do polinômio do segundo grau:

$$y^2+2y+4=0 \Leftrightarrow y=\frac{-2\pm\sqrt{4-4.4}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-12}}{2}$$
$$=\frac{-2\pm 2.\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}=\frac{-\not{2}\pm\not{2}.i.\sqrt{3}.}{\not{2}}$$
$$=-1\pm i.\sqrt{3}=2.\text{cis}\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)$$

Note que a questão ainda não foi concluída! O enunciado pede as soluções do polinômio em x, não em y. Portanto, devemos voltar à variável x:

$$x^2=2.\text{cis}\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) \overset{\text{Formula 1.5.7}}{\Rightarrow} x=\sqrt{2}.\text{cis}\left(\pm\frac{\pi}{3}+k.\pi\right),\ k=0,1$$

$$\therefore\ x\in\left\{\sqrt{2}.\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right),\sqrt{2}.\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right),\sqrt{2}.\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right),\sqrt{2}.\text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right\}$$

Exemplo 4.2.d Escreva $\cos 20°$ na forma $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$ com A e B complexos.

(Sugestão: Demonstre primeiro que: $\cos(3x)=4.\cos^3 x-3.\cos x$)

Solução: Vamos primeiro demonstrar a expressão sugerida no enunciado. Usaremos ferramentas da trigonometria (ver apêndice).

$$\cos(3x)=\cos(2x+x)=\cos(2x).\cos x-\text{sen}(2x).\text{sen}x$$
$$=(2\cos^2x-1).\cos x-(2.\text{sen}x.\cos x).\text{sen}x=2.\cos^3x-\cos x-2.\text{sen}^2x.\cos x$$
$$=2.\cos^3x-\cos x-(1-\cos^2x).2.\cos x=2\cos^3x-\cos x-2\cos x+2.\cos^3x$$
$$=4.\cos^3x-3.\cos x$$

Agora podemos utilizar a expressão demonstrada. Fazendo x = 20°, temos:

$$\cos(3\times 20°)=4.\cos^3(20°)-3.\cos(20°)$$
$$1/2=4.\cos^3(20°)-3.\cos(20°)$$
$$\therefore\ 8.\cos^3(20°)-6.\cos(20°)-1=0$$

Note que temos uma equação do 3º grau em cos(20°). Fazendo y = cos(20°), teremos:

$$8y^3-6y-1=0 \ \therefore\ y^3-\frac{3}{4}.y-\frac{1}{8}=0\ (*)$$

Essa equação já está no molde para a resolução de Cardano-Tartaglia (Resultado 4.1.1):

$$y=\sqrt[3]{\frac{1}{16}-\sqrt{\frac{1}{64.4}-\frac{27}{64.27}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{16}+\sqrt{\frac{1}{4.64}-\frac{27}{27.64}}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{1}{16}-\sqrt{-\frac{3}{64.4}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{16}+\sqrt{-\frac{3}{64.4}}}$$

$$\therefore\ \cos(20°)=\sqrt[3]{\frac{1}{16}-\frac{i}{16}\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{16}+\frac{i}{16}\sqrt{3}}$$

4.3 Operações Com Polinômios e Fatorações Importantes

Teorema Fundamental da Álgebra

Enunciaremos agora um teorema de extrema importância no estudo de polinômios, porém de difícil demonstração. A demonstração, que inclusive levou anos a ter uma aceitação concreta após inúmeras tentativas de

demonstração vindas de vários matemáticos brilhantes, será omitida aqui, pois foge ao foco do livro.

> **Teorema Fundamental da Álgebra:**
>
> Todo polinômio de coeficientes complexos e de grau n possui exatamente n raízes complexas (podendo ou não serem reais puras).

Isso quer dizer que o número de raízes de um problema de equação polinomial é dado apenas pelo grau do polinômio em questão!

Soma e Multiplicação de Polinômios

A soma e multiplicação de polinômios são feitas algebricamente como com qualquer outra expressão numérica. Basta apenas lembrar que polinômios são agrupados em coeficientes de potências da variável independente, portanto devemos sempre agrupar termos que acompanham a mesma potencia dessa variável.

Ex: $P(x) = x^3 + x + 1 \quad ; \quad Q(x) = x^2 - 2x + 7$

- $P(x) + Q(x) = (x^3 + x + 1) + (x^2 - 2x + 7)$

$$= x^3 + x^2 + x.(1-2) + 1 + 7$$

$$= x^3 + x^2 - x + 8$$

- $P(x).Q(x) = (x^3 + x + 1).(x^2 - 2x + 7)$

$$= x^3.x^2 + x^3.(-2x) + x^3.7 + x.x^2 + x.(-2x) + x.7 + x^2 - 2x + 7$$

$$= x^5 - 2.x^4 + 7.x^3 + x^3 - 2.x^2 + 7x + x^2 - 2x + 7$$

$$= x^5 - 2.x^4 + 8.x^3 - x^2 + 5x + 7$$

> ***OBS:** Note que o grau da soma de dois polinômios é o mesmo grau do polinômio de maior grau entre os dois. Na multiplicação o grau é a soma dos graus dos dois polinômios.*

Divisão de Polinômios

Assim como a soma e produto, a divisão também é feita de forma algébrica semelhante à divisão numérica. A única diferença é que os algoritmos de divisão devem ser adaptados de tal forma que seja possível serem agrupados os termos de mesma potência da variável independente (x, nos nossos exemplos). Vejamos o raciocínio no exemplo a seguir:

Ex:
Na divisão numérica:

$$29 \div 3 \;\therefore\; \underbrace{29}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{3.9}_{\substack{\text{Quociente } 9\\ \text{Divisor } 3}} + \underbrace{2}_{\text{Resto}}$$

Usando um raciocínio semelhante para polinômios, podemos definir, para divisão de polinômios:

$$P(x) \div D(x) \;\therefore\; \underbrace{P(x)}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{D(x).Q(x)}_{\substack{\text{Quociente } Q\\ \text{Divisor } D}} + \underbrace{R(x)}_{\text{Resto}}$$

Para P e D tais que o grau de P … é maior igual ao grau do D

Definição 4.3.1
(Divisão Euclidiana para Polinômios)

Ou seja, a cada divisão, temos associado um polinômio Resto e polinômio Quociente de tal forma que a expressão da Definição 4.3.1 satisfeita.

Algo importante a se atentar é que, da mesma forma que o resto na divi algébrica não deve ser maior que o divisor, o polinômio Resto tem definição) grau **inferior** ao do polinômio divisor. Essa definição dá orige questões simples, porém que se o aluno não estiver atento, tornam complicadas.

Teorema do Resto de D´Alembert

O teorema do resto de D´Alembert é de simples demonstração e de rápidc compreensão. Veja a seguir:

> O resto da divisão de P(x) por (x – k) é dado por P(k).

Resultado 4.3.1

Demonstração:
Se o divisor é de primeiro grau, então o resto deverá ser uma constante re
Sendo R essa constante real, da definição 4.3.1 temos:

$$P(x) = (x-k).Q(x) + R$$

Logo, fazendo x = k:

$$P(k) = \underbrace{(k-k)}_{=0}.Q(k) + R = R$$

Exemplo 4.3.a (ITA) Um polinômio P(x) dá resto -1 quando dividido por (x + 1), resto 1 quando dividido por (x – 1) e resto 1 quando dividido por (x – 2). Qual o resto da divisão de P(x) por (x + 1). (x – 1). (x – 2)?

Solução:
Sabemos que a divisão de um polinômio por outro do 3º grau nos dá um resto de no máximo 2º grau.

Ou seja, podemos escrever:

$$P(x) = Q(x).(x-1).(x+1).(x-2) + (a.x^2 + b.x + c)$$

Onde a,b,c são constantes a serem determinadas.

Para $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$, respectivamente, usando o resultado 4.3.1:

$$\begin{cases} P(1) = \cancel{Q(1).(1-1).(1+1).(1-2)} + (a.1 + b.1 + c) = 1 \\ P(-1) = \cancel{Q(1).(1-1).(-1+1).(1-2)} + (a.1 + b.(-1) + c) = -1 \\ P(2) = \cancel{Q(1).(1-1).(1+1).(2-2)} + (a.4 + b.2 + c) = 1 \end{cases}$$

Seguimos, então, com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a - b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{3}, \quad b = 1 \ , \ c = \frac{1}{3}$$

O resto da divisão é dado por: $R(x) = -\frac{x^2}{3} + x + \frac{1}{3}$

Algoritmo de Divisão Algébrica

Mostraremos a seguir como utilizar o algoritmo de divisão algébrica de polinômios. O método é geral, e divide um polinômio por qualquer outro polinômio de grau menor ou igual ao primeiro, porém exige cuidado com o uso dos sinais de cada termo do processo de execução do algoritmo. Vamos ilustrar a divisão com um exemplo:

$$P(x) = x^4 + 3.x^3 - 5.x^2 + 8x + 1 \quad \div \quad Q(x) = x^2 + 2x - 3$$

Algoritmo:

1º Passo: Escrevemos da maneira como está escrito a seguir, os polinômios dividendo e divisor. Analisamos os primeiros termos de cada um deles. O resultado da divisão do primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor é colocado logo abaixo a reta horizontal sob o polinômio divisor.

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 3.x^3 - 5.x^2 + 8x + 1 & x^2 + 2x - 3 \\ \hline & x^2 \end{array}$$

2º Passo: O resultado dessa primeira divisão é então multiplicado por cada termo do divisor e os seus respectivos resultados são colocados (com sinal trocado) abaixo do polinômio dividendo.

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 3.x^3 - 5.x^2 + 8x + 1 & x^2 + 2x - 3 \\ \hline -x^4 - 2.x^3 + 3.x^2 & x^2 \end{array}$$

3º Passo: O resultado obtido abaixo do dividendo é somado ao dividendo, resultando em uma nova parcela a ser dividida. O processo é então repetido até que não haja mais possibilidade de divisão.

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 3.x^3 - 5.x^2 + 8x + 1 & x^2 + 2x - 3 \\ -x^4 - 2.x^3 + 3.x^2 \qquad\quad & x^2 + x - 4 \\ \hline x^3 - 2x^2 + 8x + 1 & \\ -x^3 - 2x^2 + 3x \quad\ & \\ \hline -4x^2 + 11x + 1 & \\ +4x^2 + 8x - 12 & \\ \hline 19x - 11 & \end{array}$$

O polinômio restante à esquerda após o término do algoritmo é o polinômio Resto da divisão. O polinômio restante logo abaixo do divisor é o polinômio Quociente da divisão, de tal forma que podemos escrever:

$$x^4 + 3.x^3 - 5.x^2 + 8x + 1 = (x^2 + 2x - 3).(x^2 + x - 4) + (19x - 11)$$

Exemplo 4.3.b Ao dividir A(x) por B(x) foram obtidos o quociente Q(x) e resto R(x), onde: $Q(x) = x^2 + 2x - 1$ e $R(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 4$. Se dividirmos o polinômio A(x) por $x^2 + 2x - 1$ o resto será T(x). Calcule T(10).

Solução: Do enunciado segue: $A(x) = B(x).(x^2 + 2x - 1) + (x^3 + 3x^2 + 3x + 4)$

Com isso:

$$\frac{A(x)}{(x^2+2x-1)} = B(x) + \frac{(x^3+3x^2+3x+4)}{(x^2+2x-1)}$$

Portanto o resto será dado pela segunda divisão no membro direito da igualdade acima. Temos da divisão algébrica:

$$\begin{array}{rl|l} x^3 & +3x^2+3x+4 & x^2+2x-1 \\ \hline -x^3 & -2x^2+x & x+1 \\ \hline & x^2+4x+4 & \\ & -x^2-2x+1 & \\ \hline & 2x+5 = T(x) & \end{array}$$

E, com isso, obtemos a resposta: $T(10) = 2.10 + 5 = 25$ $\boxed{T(10) = 25}$

Fatoração de D´Alembert

Durante a época em que a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra estava em discussão, o matemático D´Alembert sugeriu uma solução para o impasse ao tentar mostrar que dado um polinômio de raiz k, ele pode ser escrito de tal forma que possui o termo (x – k) em sua fatoração.

Ou seja, o polinômio: $P(x) = x^2 - 5x + 6$, que tem raízes x = 3 e x = 2, deve possuir os termos (x-3) e (x-2) em sua fatoração. Note que, de fato:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3).(x-2)$$

O mesmo vale para o caso de raízes complexas. Veja o caso do polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 2$ que possui como raízes: $1, 1+i, 1-i$. Note que, de fato:

$$x^3 - 3.x^2 - 2 = (x-1).(x-(1+i)).(x-(1-i))$$

A demonstração da Fatoração de D´Alembert que mostraremos é rápida e interessante. Seja k uma raiz qualquer do polinômio genérico P(x).

$$P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0 \quad \text{(I)}$$

Como x = k é raiz, podemos escrever:

$$0 = a_n.k^n + a_{n-1}.k^{n-1} + \ldots + a_2.k^2 + a_1.k + a_0 \quad \text{(II)}$$

Fazendo a subtração (I) – (II) membro a membro, temos:

$$P(x) - 0 = a_n.(x^n - k^n) + a_{n-1}.(x^{n-1} - k^{n-1}) + \ldots + a_2.(x^2 - k^2) + a_1.(x-k) \quad \text{(III)}$$

Da fatoração conhecida:

$$a^n - b^n = (a-b).(a^{n-1} + a^{n-2}.b + \ldots + a\ .b^{n-2} + b^{n-1})$$

Podemos colocar o fator (x - k) em evidência em cada termo do lado direito de (III):

$$P(x) = (x-k).(Q(x))$$

> **Conclusão Importante:**
> De forma geral, podemos fatorar o polinômio de raízes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ e coeficiente do termo de maior grau igual a 'a' da seguinte forma:
>
> $$P(x) = a.(x-\alpha_1).(x-\alpha_2).(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)$$

Resultado 4.3.2

OBS: *Se o polinômio possuir um fator que se repete mais de uma vez na fatoração do Resultado 4.3.2, dizemos que esse possui a raiz do fator como sendo raiz múltipla. Estudaremos bastante as propriedades das raízes múltiplas mais adiante.*

Do resultado 4.3.2 segue outro resultado importantíssimo! Se todas as raízes de um polinômio Q(x) forem raízes de P(x) também, P terá todos os fatores de Q em sua fatoração. Com isso a divisão de P(x) por Q(x) será exata (não deixará resto) e podemos dizer:

> **Divisibilidade de Polinômios**
> P(x) é divisível por Q(x) quando todas as raízes de Q(x) forem também raízes de P(x).

Resultado 4.3.3

Exemplo 4.3.b (IME – 1994) Mostre que P(x) é divisível por Q(x) onde P e Q são os dados:

$$P(x)=x^{999}+x^{888}+x^{777}+x^{666}+x^{555}+x^{444}+x^{333}+x^{222}+x^{111}+1$$

$$Q(x)=x^{9}+x^{8}+x^{7}+x^{6}+x^{5}+x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1$$

Solução:

Vamos determinar todas as raízes de Q(x):

$$Q(x)=x^{9}+x^{8}+x^{7}+x^{6}+x^{5}+x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1$$

O desenvolvimento de Q(x) é uma soma de P.G. de razão x: $Q(x)=\dfrac{x^{10}-1}{x-1}$

Portanto, as raízes de Q(x) serão do tipo α, tais que:

$$Q(\alpha)=0 \iff \frac{\alpha^{10}-1}{\alpha-1}=0 \iff \begin{cases}\alpha^{10}-1=0\\ \alpha\neq 1\end{cases}$$

Utilizando a fórmula 1.6.1 da seção de Números Complexos, temos que as raízes de Q(x) são:

$$\alpha=\text{cis}\left(\frac{2k\pi}{10}\right),\ k=1,2,3,\ldots,9$$

Verifiquemos se todas essas raízes são raízes de P(x):

$$P(\alpha)=\left(\alpha^{111}\right)^{9}+\left(\alpha^{111}\right)^{8}+\left(\alpha^{111}\right)^{7}+\left(\alpha^{111}\right)^{6}+\left(\alpha^{111}\right)^{5}+\ldots+\left(\alpha^{111}\right)+1=$$

$$=\frac{\left(\alpha^{111}\right)^{10}-1}{\alpha^{111}-1}=\frac{\left(\alpha^{10}\right)^{111}-1}{\alpha^{111}-1}=\frac{\left(\left(\text{cis}\left(\frac{2k\pi}{10}\right)\right)^{10}\right)^{111}-1}{\alpha^{111}-1}=\frac{\left(\text{cis}\left(\frac{2k\pi}{\cancel{10}}\cdot\cancel{10}\right)\right)^{111}-1}{\alpha^{111}-1}$$

$$=\frac{\left(\text{cis}(2k\pi)\right)^{111}-1}{\alpha^{111}-1}=\frac{1-1}{\alpha^{111}-1}=0$$

Portanto, todas as raízes de Q(x) são raízes de P(x). Do Resultado 4.3.3, temos que P(x) é divisível por Q(x).

Exemplo 4.3.c (ITA – adaptada) Suponhamos que os polinômios P(x), Q(x), p(x) e q(x) satisfaçam as seguintes condições:

$$\begin{cases}P(x).p(x)+Q(x).q(x)=1 \quad \forall x\in\mathbb{C}\\ P(\,p(1)\,)=0\ ,\ Q(0)=0\end{cases}$$

Mostre que p(x) não é divisível por (x – 1).

Solução:

Vamos supor por absurdo que p(x) seja divisível por (x -1). Isto é, o resto da divisão de p(x) por (x – 1) é nulo, ou ainda, que:

$$p(1)=0$$

Fazendo x = p(1), temos:

$$\underbrace{P(\,p(1)\,)}_{=0}.\,p(\,p(1)\,)+\underbrace{Q(\,p(1)\,)}_{=Q(0)=0}.q(\,p(1)\,)=1$$

Ou ainda:

$$0=1$$

ABSURDO!

Ou seja, nossa hipótese de que p(x) é divisível por (x – 1) é falsa, concluindo nossa prova.

Exemplo 4.3.d Determine as raízes do polinômio: $P(x)=x^3-10x^2+29x-20$

Solução:

Uma inspeção rápida nos fornece que 1 é raiz desse polinômio, uma vez que a soma dos coeficientes é nula. Ou seja:

$$P(1)=1^3-10.1^2+29.1-20=0$$

Portanto P(x) possui um fator (x – 1) em sua fatoração. Ou ainda:

$$P(x)=x^3-10x^2+29x-20=(x-1).Q(x)$$

Onde Q(x) é o polinômio que representa os demais fatores de P(x). Por P(x) ser de grau 3, do Teorema Fundamental da Álgebra, sabemos que possui 3 raízes e Q(x) deve possuir os outros dois fatores restantes na fatoração de P(x) (i.e. Q(x) é de grau 2).

$$P(x)=x^3-10.x^2+29.x-20=(x-1).(x^2+ax+b)$$

Falta apenas determinar os coeficientes a e b de Q(x). Para isso, façamos uma simples identidade de polinômios:

$$x^3-10.x^2+29.x-20\equiv(x-1).(x^2+ax+b)$$

Queremos que a identidade acima valha para todo valor de x.
Usando a Definição 4.2.2, temos que:

$$x^3-10.x^2+29.x-20\equiv x^3+(a-1).x^2+(b-a).x-b$$

3º Passo: Procedemos da mesma maneira para o próximo termo. No nosso exemplo fica: (2 x 4) + (-1) = 7 , e para o termo seguinte: (2 x 7) + (3) = 17.

Os números resultantes abaixo da linha horizontal, compreendidos entre as linhas verticais são os coeficientes do polinômio Q(x), que agora é do segundo grau.

O número ao lado direito da segunda barra vertical é o resto da divisão.

	1	2	-1	3
2	1	4	7	17

Ou seja, podemos escrever: $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3 = (x-2).(x^2 + 4x + 7) + 17$

Note que o resultado está coerente com o Teorema do Resto de D´Alembert (Resultado 4.3.1) pois:

$$P(2) = 2^3 + 2.2^2 - 2 + 3 = 17$$

Exemplo 4.3.d Utilize o Algoritmo de Briot-Ruffini para resolver novamente o exemplo 4.3.c.

Solução:
Novamente, por inspeção, conhecemos uma raiz do polinômio. 1 é raiz do polinômio, uma vez que a soma dos coeficientes é nula. Ou seja:

$$P(1) = 1^3 - 10.1^2 + 29.1 - 20 = 0$$

Vamos reduzir o grau, por Briot-Ruffini:

	1	-10	29	-20
1	1	-9	20	0

Com isso: $P(x) = (x-1).(x^2 - 9x + 20)$

Seguindo o raciocínio do exemplo 4.3.c, achando as demais raízes:

$$P(x) = (x-1).(x-4).(x-5)$$

As raízes do polinômio P(x) são:

$$\boxed{1, 4, 5}$$

4.4 Relações de Girard

Vimos na seção 4.2 que existem métodos analíticos para achar as raízes de Equações do primeiro grau, do segundo grau, do terceiro grau e do quarto grau. Não há métodos gerais analíticos para determinar as raízes de polinômios quaisquer diferentes deles (veremos mais a frente alguns outros casos particulares, em que poderemos criar métodos específicos para achar as raízes, quando estudarmos equações recíprocas).

Estudaremos agora algumas relações inerentes a cada polinômio que **auxiliam** na busca de novas raízes. Cabe ressaltar que essas relações por si só nunca permitirão que encontremos as raízes do polinômio. Elas apenas auxiliarão a nossa busca, junto a outras informações conhecidas a respeito da equação analisada.

Antes de enunciarmos as famosas Relações de Girard, vamos primeiro definir um termo que será mencionado no próprio teorema, para que a compreensão posterior seja facilitada.

Sejam a, b, c, d,... raízes de um polinômio. Definimos como somas de Girard:

$$\begin{cases} S_G^1 = a + b + c + d + \ldots \\ S_G^2 = a.b + a.c + \ldots + b.c + b.d + \ldots + c.d + \ldots \\ S_G^3 = a.b.c + a.b.d + b.c.d + \ldots \\ \ldots \end{cases}$$

O índice numérico associado a cada soma nos diz o número de termos agrupados em cada parcela da soma. Ou seja, a soma de índice 1 de Girard (leia-se "S um de Girard") é a soma das raízes tomadas uma a uma. A soma de índice 2 é a soma das raízes tomadas duas a duas, e assim por diante.

Relações de Girard

Dado um polinômio: $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_1.x + a_0$ é valido que:

$$S_G^1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad S_G^2 = \frac{a_{n-2}}{a_n} \quad S_G^3 = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \quad \ldots \quad S_G^k = (-1)^k.\frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Resultado 4.4.1

Não demonstraremos ainda as relações de Girard. Daremos uma noção intuitiva da demonstração desse resultado, para os casos de polinômios de grau 2 e 3, e a demonstração será pedida no Exercício de Fixação 4.7 na forma de Indução Finita (veja a resolução no capítulo 7).

Para o polinômio do segundo grau $P(x) = a.x^2 + b.x + c$ de raízes m, n, podemos fatorar:

$$\begin{aligned} a.x^2 + b.x + c &\equiv a.(x-m).(x-n) \\ &\equiv a.(x^2 - m.x - n.x + m.n) \\ &\equiv a.(x^2 - (m+n)x + m.n) \\ &\equiv a.x^2 - a(S_G^1).x + a.(S_G^2) \end{aligned}$$

$$\therefore\ S_G^1 = -\frac{b}{a}\ ;\ S_G^2 = \frac{c}{a}$$

Note que as Relações de Girard são verificadas para polinômios do 2º grau.

Para o polinômio do terceiro grau $P(x) = a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$ de raízes m, n, p podemos fatorar

$$\begin{aligned} a.x^3 + b.x^2 + c.x + d &\equiv a.(x-m).(x-n).(x-p) \\ &\equiv a.(x^2 - m.x - n.x + m.n).(x-p) \\ &\equiv a.(x^3 - x^2.p - m.x^2 + m.p.x - n.x^2 + n.p.x + m.n.x - m.n.p) \\ &\equiv a.(x^3 - (m+n+p).x^2 + (m.p + n.p + m.n).x - m.n.p) \\ &\equiv a.x^3 - a(S_G^1).x^2 + a.(S_G^2).x - a.(S_G^3) \end{aligned}$$

$$\therefore\ S_G^1 = -\frac{b}{a}\ ;\ S_G^2 = \frac{c}{a}\ ;\ S_G^3 = -\frac{d}{a}$$

Verifica-se então, também, para o polinômio do 3º grau o resultado 4.4.1. O modo como foram encaminhadas tais verificações já deixa a noção de como proceder para demonstrar o caso geral com o processo de indução finita. Vejamos como as Relações de Girard podem ser úteis, nos seguintes exemplos:

Exemplo 4.4.a Determine as raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 15x^2 + 66x - 80$ sabendo que as mesmas se encontram em Progressão Aritmética.

Solução:

Como as raízes estão em progressão aritmética, podemos dizer que são do tipo:

$$\alpha - r,\ \alpha\ ,\ \alpha + r$$

Das relações de Girard para o polinômio, obtemos:

$$\begin{cases} S_G^1 = (\alpha - r) + (\alpha) + (\alpha + r) = 15 \Rightarrow 3\alpha = 15 & \therefore\ \alpha = 5 \\ S_G^3 = (\alpha - r).(\alpha).(\alpha + r) = 80 & \Rightarrow \alpha.(\alpha^2 - r^2) = 80 \quad \therefore\ r = \pm 3 \end{cases}$$

De onde segue que as 3 raízes são:

2, 5, 8

Exemplo 4.4.b Para o polinômio $P(x) = x^4 - 5.x^3 + 9x^2 - 8$ determine a soma dos quadrados das suas raízes.

Solução:
Não sabemos o método prático de determinar as raízes do polinômio do 4º grau dado. Porém, para calcular a soma dos quadrados delas não é preciso que as conheçamos individualmente. Sejam a, b, c, d essas raízes:

Das relações de Girard para o polinômio, obtemos:

$$\begin{cases} S_G^1 = (a+b+c+d) = 5 \\ S_G^2 = (a.b + b.c + a.c + a.d + b.d + c.d) = 9 \end{cases}$$

Levando em consideração que:

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2.(a.b + a.c + a.d + b.c + b.d + c.d)$$

Teremos:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \underbrace{(a+b+c+d)}_{S_G^1 = 5}{}^2 - 2.\underbrace{(a.b + a.c + a.d + b.c + b.d + c.d)}_{S_G^2 = 9}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7$$

OBS: *Note que, no exercício anterior, calculamos a soma dos quadrados das raízes do polinômio, sem conhecermos as mesmas, ou sequer sabermos se as raízes eram reais puras ou não. De fato, o resultado de Girard é geral, e não faz essa distinção, nos permitindo aplicá-lo para qualquer polinômio de coeficientes complexos.*

Vimos a prova no Exercício de fixação do primeiro capítulo (Exercício 1.23), de que, se um polinômio de coeficientes reais admite uma raiz complexa com parte imaginária não nula, então seu conjugado também será raiz.

Tal afirmativa é confirmada intuitivamente pela aplicação das Relações de Girard. Sendo uma raiz de um polinômio de coeficientes reais do tipo a + b.i , como a soma de todas as raízes deve ser real, deverá existir também uma raiz complexa com o termo (- b.i) presente para que haja o cancelamento dos termos imaginários.

Como o mesmo deve acontecer para o produto, e sabemos, da teoria dos complexos de que o produto de dois conjugados é um real puro, o Teorema provado no Exercício 1.23 torna-se bastante intuitivo.

Teorema
Dado um polinômio de coeficientes reais. Se o mesmo polinômio admite uma raiz complexa com parte imaginária não nula, então seu conjugado também será raiz.

Teorema 4.4.1

Um raciocínio análogo pode ser feito para um polinômio de coeficientes racionais, admitindo uma raiz irracional. Toda raiz irracional pode ser escrita da forma $a+\sqrt{b}$, e pelo mesmo raciocínio de cancelamento da parte irracional, segue o seguinte resultado:

Teorema
Dado um polinômio de coeficientes racionais. Se o mesmo polinômio admite uma raiz irracional do tipo $a+\sqrt{b}$, então $a-\sqrt{b}$ também será raiz.

Teorema 4.4.2

Exemplo 4.4.c O polinômio $x^5-9.x^4+22x^3-14.x^2+21.x-5$ possui como duas de suas raízes os números i e $2+\sqrt{3}$. Determine as demais raízes desse polinômio.

Solução:
Note que o polinômio dado tem coeficientes reais e racionais. Dos teoremas 4.4.1 e 4.4.2, sabemos que também são raízes do polinômio: $-i$ e $2-\sqrt{3}$

Já conhecemos, então, quatro das cinco raízes do polinômio. Sendo k a raiz desconhecida, e com o auxilio da relação de Girard, temos que a soma de todas as raízes será:

$$(i)+(-i)+\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)+k=S_G^1=9$$

$$\therefore \quad k=5$$

Exemplo 4.4.d (ITA 2006) Considere o polinômio: $P(x)=x^3+a.x^2+x+1$ com raízes reais. O coeficiente a é racional e a diferença entre duas de suas raízes também é racional. Nestas condições, mostre que é verdadeira a afirmação: "Se uma das raízes de P(x) é racional, então todas as suas raízes são racionais."

Solução: Sejam α, β e γ as raízes do polinômio, e α a raiz racional da hipótese da afirmativa. Do enunciado, temos dois casos possíveis:

I) $\alpha-\beta=q\in\mathbb{Q}$

Nesse caso, temos: $\beta=\alpha-q$ que será a diferença entre dois racionais, e, portanto racional também.

A terceira raiz será racional também, uma vez que se fosse irracional, sua raiz conjugada (irracional) deveria ser também raiz (teorema 4.4.1), o que não é possível. Logo todas as raízes são racionais!

II) $\gamma-\beta=q_1\in\mathbb{Q}$

Das relações de Girard, temos que a soma das raízes é racional, e, como α é racional, temos que $\gamma+\beta=q_2\in\mathbb{Q}$. Segue que:

$$\gamma=\frac{q_1+q_2}{2}\in\mathbb{Q} \quad ; \quad \beta=\frac{q_2-q_1}{2}\in\mathbb{Q}$$

Ou seja, é verdadeiro afirmar que se uma raiz é racional, todas também são.

Exemplo 4.4.e (IME 2004) Considere o polinômio x^3+ax+b de coeficientes reais e constante b não nula. Sabendo que suas raízes são reais, demonstre que a < 0.

Solução: Sejam m, n e p as raízes do polinômio.

$$\begin{cases} m+n+p=0 \\ m.n+n.p+m.p=a \\ m.n.p=-b \end{cases}$$

Da ultima equação acima, como b é não-nulo, temos que nenhuma das raízes poderá ser 0 uma vez que o produto delas é não – nulo.

Note o que acontece se elevarmos a primeira equação ao quadrado:

$$(m+n+p)^2 = m^2+n^2+p^2+2.\underbrace{(m.n+m.p+n.p)}_{a}=0$$

$$\Rightarrow \quad a=-\frac{m^2+n^2+p^2}{2}$$

Como m, n, p são reais, temos que a soma $m^2+n^2+p^2$ é positiva, e, com isso, a deverá ser necessariamente menor que zero.

4.5 Teorema de Newton

Antes de enunciarmos o teorema de Newton, vamos primeiro definir um termo que será mencionado no próprio teorema, para que a compreensão posterior seja facilitada.

Sejam a, b, c, d,... raízes de um polinômio. Definimos como Soma de Newton ("S" de Newton), a seguinte soma:

$$S_k^* = a^k + b^k + c^k + d^k + \ldots$$

Teorema de Newton

Dado um polinômio: $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_1.x + a_0$ é valido que:

$$a_n.S_k^* + a_{n-1}.S_{k-1}^* + \ldots + a_1.S_{k-n-1}^* + a_0.S_{k-n}^* = 0 \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Resultado 4.5.1

Demonstração:

Demonstraremos o teorema 4.5.1 para um polinômio de grau 3. A demonstração para graus maiores é exatamente análoga.

Seja: $P(x) = a.x^3 + b.x^2 + cx + d$ com raízes α, β, γ. Como são raízes, segue:

$$\begin{cases} P(\alpha) = a.\alpha^3 + b.\alpha^2 + c\alpha + d = 0 \\ P(\beta) = a.\beta^3 + b.\beta^2 + c.\beta + d = 0 \\ P(\gamma) = a.\gamma^3 + b.\gamma^2 + c.\gamma + d = 0 \end{cases}$$

Multiplicando as equações, respectivamente por $\alpha^{k-3}, \beta^{k-3}, \gamma^{k-3}$ temos:

$$\begin{cases} a.\alpha^{3+k-3} + b.\alpha^{2+k-3} + c.\alpha^{1+k-3} + d.\alpha^{k-3} = 0.\alpha^{k-3} = 0 \\ a.\beta^{3+k-3} + b.\beta^{2+k-3} + c.\beta^{1+k-3} + d.\beta^{k-3} = 0.\beta^{k-3} = 0 \\ a.\gamma^{3+k-3} + b.\gamma^{2+k-3} + c.\gamma^{1+k-3} + d.\gamma^{k-3} = 0.\gamma^{k-3} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a.\alpha^k + b.\alpha^{k-1} + c.\alpha^{k-2} + d.\alpha^{k-3} = 0 \\ a.\beta^k + b.\beta^{k-1} + c.\beta^{k-2} + d.\beta^{k-3} = 0 \\ a.\gamma^k + b.\gamma^{k-1} + c.\gamma^{k-2} + d.\gamma^{k-3} = 0 \end{cases}$$

Se somarmos membro a membro as 3 equações teremos:

$$a.\underbrace{\left(\alpha^k + \beta^k + \gamma^k\right)}_{S_k^*} + b.\underbrace{\left(\alpha^{k-1} + \beta^{k-1} + \gamma^{k-1}\right)}_{S_{k-1}^*} +$$

$$+c.\underbrace{\left(\alpha^{k-2} + \beta^{k-2} + \gamma^{k-2}\right)}_{S_{k-2}^*} + d.\underbrace{\left(\alpha^{k-3} + \beta^{k-3} + \gamma^{k-3}\right)}_{S_{k-3}^*} = 0$$

Exemplo 4.5.a Sendo a, b, c, d as raízes do polinômio $x^4 - 5.x^2 + 2x + 1 = 0$, determine a soma $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$.

Solução: A soma pedida é justamente S_4^* (leia-se "S quatro de Newton"). Pelo teorema de Newton (4.5.1), temos:

$$(S_4^*) + 0.(S_3^*) - 5.(S_2^*) + 2.(S_1^*) + 1.(S_0^*) = 0.$$

Calculando as demais somas de Newton necessárias:

$$\begin{cases} S_2^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ \quad = (a+b+c+d)^2 - 2.(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \\ \quad = \left(S_G^1\right)^2 - 2.\left(S_G^2\right) = (0)^2 - 2.(-5) = 10 \\ (S_1^*) = a+b+c+d = (S_G^1) = 0 \\ (S_0^*) = a^0 + b^0 + c^0 + d^0 = 4 \end{cases}$$

Substituindo na expressão de Newton:

$$(S_4^*) + 0.(S_3^*) - 5 \times 10 + 2 \times 0 + 1 \times 4 = 0$$

$$\therefore \quad S_4^* = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 46$$

OBS Importante: *Note que o teorema de Newton não estipula que valor de k deverá ser usado para iniciar como acompanhante do primeiro termo do polinômio. A escolha é arbitrária (verifique a demonstração). Ou seja, na questão resolvida acima, poderíamos ter calculado a soma pedida, partindo da seguinte (também verdadeira) expressão do Teorema de Newton:*

$$S_6^* + 0.S_5^* - 5.S_4^* + 2.S_3^* + 1.S_2^* = 0$$

Obviamente, haveria grande desvantagem em fazer isto, uma vez que calcular S_6^* *não é tão prático, a priori. Essa arbitrariedade de podermos começar a expressão de Newton com qualquer valor de k permite que, com certa facilidade, calculemos outras somas.*

Neste caso, por exemplo, como já conhecemos o valor de S_4^**, poderemos obter facilmente o valor de* S_6^* *usando a expressão da forma que colocamos acima.*

Exemplo 4.5.b (IME 2003) Resolva novamente o exemplo 4.4.e. Considere o polinômio $x^3 + ax + b$ de coeficientes reais e de constante b não nula. Sabendo que suas raízes são reais, demonstre que a < 0.

Solução: Para o polinômio, pelo Teorema de Newton, podemos escrever:

$$(S_2^*) + a.(S_0^*) + b.(S_{-1}^*) = 0$$

Sendo m, n, p as raízes do polinômio, temos:

$$\left(m^2+n^2+p^2\right) + a.\left(m^0+n^0+p^0\right) + b.\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(m^2+n^2+p^2\right) + a.3 + b.\left(\frac{n.p+m.p+m.n}{m.n.p}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(m^2+n^2+p^2\right) + a.3 + b.\left(\frac{S_G^2}{S_G^3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(m^2+n^2+p^2\right) + a.3 + b.\left(\frac{a}{-b}\right) = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{m^2+n^2+p^2}{2}$$

Como m, n, p são reais, então $m^2+n^2+p^2 > 0$ e com isso, a < 0.

4.6 Teorema de Girard

Existe uma segunda forma distinta de determinar o valor dos somatórios de Newton de maneira prática. O resultado que mostraremos a seguir é conhecido como Teorema de Girard e tanto sua aplicação quanto "conhecer" sua demonstração podem ser úteis em provas de IME/ITA (principalmente do IME). É comum o IME pedir a demonstração de teoremas famosos em suas provas (como aconteceu na prova de 2005 em que o IME cobrou a demonstração do Teorema de Newton, da seção 4.5). De fato, a demonstração do resultado a seguir não exige conhecimentos extraordinários do aluno e poderia muito bem ser cobrada em uma eventual prova de concurso. Portanto, sugerimos atenção tanto ao resultado quanto à sua demonstração!

Teorema de Girard
Dividindo-se (utilizando o método algébrico) a derivada de um polinômio P(x) pelo polinômio original, obtém-se um quociente resultado, do tipo:

$$\frac{S_0^*}{x}+\frac{S_1^*}{x^2}+\frac{S_2^*}{x^3}+\frac{S_3^*}{x^4}+\dots$$

Onde S_0^*, S_1^*, S_2^*, ... são as somas de Newton, definidas na seção 4.5.

Resultado 4.6.1

Demonstração
Seja P(x) um polinômio de grau n com raízes: $x_1, x_2, \dots, x_n$. De acordo com o resultado 4.3.2 podemos fatorar P(x) como:

$$P(x)=a.(x-x_1).(x-x_2).(x-x_3).....(x-x_n) \quad \textbf{(Eq. I)}$$

Apliquemos a operação "log neperiano (ln)" em ambos os lados da igualdade:

$$\ln P(x)=\ln\left[a.(x-x_1).(x-x_2).(x-x_3).....(x-x_n)\right]$$

$$\Rightarrow \ln P(x)=\ln|a|+\ln(|x-x_1|)+\ln(|x-x_2|)+\dots+\ln(|x-x_n|)$$

Ao fazermos isso devemos ter **cautela**. Como a Equação I deve valer para todo x real pode ser que o polinômio assuma valores negativos, o que não permitiria a aplicação do logaritmo. Isso acontecerá sempre que x for menor que um número ímpar de raízes de P(x), resultando em um número ímpar de parcelas negativas $(x - x_k)$.

Nesse caso, será sempre possível multiplicar ambos os lados por −1, e rearranjar os sinais das parcelas do lado direito, de modo que ambos os membros da equação sejam positivos, e o lado direito da equação seja composto apenas de parcelas positivas. Visto isso, seguiremos a demonstração para o caso em que as parcelas $(x - x_k)$ são positivas (a demonstração, caso contrário, é exatamente análoga tendo feita a alteração mencionada acima).

$$\ln P(x)=\ln|a|+\ln|x-x_1|+\ln|x-x_2|+\dots+\ln|x-x_n|$$

Derivando a equação acima com relação a x:

$$\frac{d}{dx}[\ln P(x)]=\underbrace{\frac{d}{dx}\ln(a)}_{=0}+\frac{d}{dx}\ln|x-x_1|+\frac{d}{dx}\ln|x-x_2|+\dots+\frac{d}{dx}\ln|x-x_n|$$

$$\therefore \frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\dots+\frac{1}{x-x_n} \quad \textbf{(Eq. II)}$$

Vamos dar uma arrumada nos termos à direita na equação II. Para cada parcela da direita, podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{1}{x-x_k}=\frac{1}{x.\left(1-\frac{x_k}{x}\right)}=\frac{1/x}{\left(1-\frac{x_k}{x}\right)}$$

Voltando na equação II:

$$\Rightarrow \frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{1/x}{\left(1-\frac{x_1}{x}\right)}+\frac{1/x}{\left(1-\frac{x_2}{x}\right)}+\dots+\frac{1/x}{\left(1-\frac{x_n}{x}\right)} \quad \textbf{(Eq. III)}$$

Note agora, que cada parcela do lado direito da igualdade acima se parece muito com uma soma de PG infinita. Vale relembrar que:

$$a+a.q+a.q^2+\dots=\frac{a}{1-q} \quad \Leftrightarrow \quad |q|<1$$

(Soma de P.G.)

Ora, mas cada parcela da igualdade da Equação III se assemelha bastante com o valor da soma de uma P.G. infinita.

$$\frac{1/x}{\left(1-\frac{x_k}{x}\right)} \leftrightarrow \frac{a}{1-q}$$

A condição de convergência da P.G. infinita ($|q|<1$) é satisfeita, pois:

$$x - x_k > 0 \Rightarrow |x| > |x_k| \Rightarrow \left|\frac{x_k}{x}\right| < 1$$

Ou seja, podemos reescrever a equação III como:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \left(\frac{1}{x} + \frac{x_1}{x^2} + \frac{x_1^2}{x^3} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{x_2}{x^2} + \ldots\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x} + \frac{x_n}{x^2} + \frac{x_n^2}{x^3} + \ldots\right)$$

Arrumando:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \underbrace{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x}\right)}_{\text{n termos}} + \left(\frac{x_1}{x^2} + \frac{x_2}{x^2} + \ldots + \frac{x_n}{x^2}\right) + \ldots + \left(\frac{x_1^n}{x^{n+1}} + \frac{x_2^n}{x^{n+1}} + \ldots + \frac{x_n^n}{x^{n+1}}\right) + \ldots$$

$$= \frac{S_0^*}{1} + \frac{S_1^*}{x} + \frac{S_2^*}{x^2} + \frac{S_3^*}{x^3} + \ldots$$

Para melhor compreensão das propriedades de logaritmos usadas, consulte um livro de álgebra de ensino médio.

> ***Curiosidade Histórica***
> *As relações de Girard vistas na seção 4.4 deveriam ser creditadas a Newton, que foi o primeiro a estudá-las no seu trabalho de pesquisa sobre polinômios. O verdadeiro teorema de Girard é o que acabamos de mostrar (Resultado 4.6.1).*

Exemplo 4.6.a Resolva novamente o exemplo 4.5.a, verificando a validade do Teorema de Girard.

Solução: Sendo a, b, c, d as raízes do polinômio P(x) dado, queremos determinar a soma: $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$.

$$P(x) = x^4 - 5.x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad P'(x) = 4.x^3 - 10.x + 2$$

Realizando a divisão algébrica:

$$\begin{array}{l|l}
4x^3 - 10.x + 2 & x^4 - 5.x^2 + 2.x + 1 \\
\hline
-4x^3 + 20.x - 8 - \frac{4}{x} & \frac{4}{x} + \frac{10}{x^3} - \frac{6}{x^4} + \frac{46}{x^5} + \ldots \\
\quad 10.x - 6 - \frac{4}{x} & \\
\quad -10.x + \frac{50}{x} - \frac{20}{x^2} - \frac{10}{x^3} & \\
\quad\quad -6 + \frac{46}{x} - \frac{20}{x^2} - \frac{10}{x^3} & \\
\quad\quad +6 - \frac{30}{x^2} + \frac{12}{x^3} + \frac{6}{x^4} & \\
\quad\quad\quad + \frac{46}{x} - \frac{50}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^4} & \\
\quad\quad\quad - \frac{46}{x} + \frac{230}{x^3} - \frac{92}{x^4} - \frac{46}{x^5} & \\
\quad\quad\quad\quad \ldots &
\end{array}$$

Do resultado da divisão temos que o quociente, pela comparação do resultado 4.6.1, é tal que:

$$\frac{4}{x} + \frac{10}{x^3} - \frac{6}{x^4} + \frac{46}{x^5} + \ldots \equiv \frac{S_0^*}{x} + \frac{S_1^*}{x^2} + \frac{S_2^*}{x^3} + \frac{S_3^*}{x^4} + \ldots$$

Da comparação acima, segue que:

$$\therefore \quad \boxed{S_4^* = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 46}$$

Que está coerente com o resultado obtido no Exemplo 4.5.a.

Exemplo 4.6.b Resolva novamente o exemplo 4.5.b, verificando a validade do Teorema de Girard.

Solução:
Sendo m, n, p as raízes do polinômio dado, temos:

$$P(x) = x^3 + a.x + b \quad \Rightarrow \quad P'(x) = 3.x^2 + a$$

Fazendo a divisão algébrica:

$$\begin{array}{l|l} 3x^2 + a & x^3 + a.x + b \\ \hline -3.x^2 - 3.a - \dfrac{3.b}{x} & \dfrac{3}{x} - \dfrac{2a}{x^3} + \ldots \\ \hline -2.a - \dfrac{3.b}{x} & \\ 2.a + \dfrac{2.a^2}{x^2} + \dfrac{2.a.b}{x^3} & \\ \hline \ldots & \end{array}$$

Com o resultado 4.6.1 segue que:

$$m^2 + n^2 + p^2 = -2.a \quad \therefore \quad a = -\frac{m^2 + n^2 + p^2}{2}$$

Como m, n, p são números reais não-nulos, temos que $a < 0$, o que está coerente com o resultado do exemplo 4.5.b.

4.7 MDC de Polinômios e Raízes Comuns

Um problema que tem se mostrado com certa reincidência nos concursos do IME e do ITA consiste em determinar as raízes comuns entre dois dados polinômios. Estudaremos a solução desse tipo de problema a seguir.

O Resultado 4.3.2 nos mostrou que um polinômio de raízes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ pode ser fatorado como:

$$P(x) = a.(x - \alpha_1).(x - \alpha_2).(x - \alpha_3).....(x - \alpha_n)$$

Podemos fazer uma analogia entre polinômios e números inteiros, que podem também ser fatorados de maneira semelhante quanto aos seus fatores primos.

Ex:

$$\begin{cases} 140 = 2^2.5.7 \\ 108 = 2^2.3^3 \\ \quad \ldots \end{cases}$$

Determinar o MDC entre dois números equivale a determinar o maior número que divide ambos exatamente (ou ainda, determinar o número que possui o maior numero de fatores primos comuns com os dois números dados). Seguindo nossa analogia, determinar o MDC entre dois polinômios equivale a determinar o polinômio de maior grau que divide ambos os polinômios exatamente (ou ainda, determinar o polinômio que possui o maior número de fatores comuns com os dois polinômios dados).

MDC
Dado dois polinômios P(x) e Q(x). O MDC entre P e Q será o polinômio M(x) de maior grau tais que P(x) e Q(x) são divisíveis por M(x).

Definição 4.7.1

Um resultado importante e imediato dessa definição é citado a seguir.

Raízes Comuns: As raízes comuns entre dois polinômios P(x) e Q(x) serão as raízes do polinômio MDC entre P e Q.

Resultado 4.7.1

Voltando à nossa analogia com os números, lembremos um famoso algoritmo de determinação do MDC entre dois números, tomando como exemplo os números 3060 e 2856.

Algoritmo numérico (Método de Euclides):

1º Passo: Dividimos o maior dos dois números pelo menor deles, obtendo um resto da divisão.

$$\begin{array}{r|l} 3060 & 2856 \\ \hline \text{Resto}: 204 & 1 \end{array}$$

2º Passo: Dividimos o divisor da primeira divisão pelo resto da mesma, obtendo um novo resto. Este passo é repetido até que o resto obtido seja 0. Isso acontece justamente na primeira execução desse passo no exemplo usado.

$$\begin{array}{r|l} 2856 & 204 \\ \hline \text{Resto}: 0 & 14 \end{array}$$

3º Passo: Quando a divisão realizada der resto zero, o MDC aparece na posição do divisor da última divisão. De acordo com o nosso exemplo:

$$\text{MDC}(2856, 3060) = 204$$

Usando um algoritmo exatamente análogo podemos determinar o MDC entre dois polinômios. Como exemplo, vamos determinar o MDC entre os polinômios

$$\begin{cases} P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 \\ Q(x) = x^4 - 1 \end{cases}$$

Algoritmo Polinomial (Método de Euclides para polinômios):

1º Passo: Dividimos o polinômio de maior grau pelo de menor, obtendo um resto da divisão.

$$\begin{array}{l|l} x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 & x^4 - 1 \\ \cline{2-2} -x^5 \qquad\qquad\quad + x & x + 1 \\ \cline{1-1} x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1 & \\ -x^4 \qquad\qquad\quad + 1 & \\ \cline{1-1} x^3 + x^2 + 2x + 2 & \end{array}$$

2º Passo: Dividimos o divisor da primeira divisão pelo resto da mesma, obtendo um novo resto. Este passo é repetido até que o resto obtido seja 0. Isso acontece justamente na primeira execução desse passo no exemplo usado.

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 1 & x^3 + x^2 + 2x + 2 \\ \cline{2-2} -x^4 - x^3 - 2.x^2 - 2.x & x - 1 \\ \cline{1-1} -x^3 - 2x^2 - 2x - 1 & \\ x^3 + x^2 + 2x + 2 & \\ \cline{1-1} -x^2 + 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x^2 + 2x + 2 & -x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 \qquad + x & -x - 1 \\ \cline{1-1} x^2 + 3x + 2 & \\ -x^2 \qquad + 1 & \\ \cline{1-1} 3x + 3 & \end{array}$$

OBS: *Antes da próxima divisão, que seria entre $-x^2+1$ e $3x+3$ podemos evidenciar o 3 no divisor para facilitar as contas, sem alterar nosso resultado.*

$$\begin{array}{l|l} -x^2 + 1 & x + 1 \\ \cline{2-2} x^2 + x & -x - 1 \\ \cline{1-1} x + 1 & \\ -x - 1 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Chegando ao resto nulo, temos que o divisor da última divisão é o MDC entre os dois polinômios originais. Sendo assim:

$$MDC\left(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\ ;\ x^4-1\right)=x+1$$

Podemos ainda aproveitar o MDC obtido e dizer que as raízes comuns entre os polinômios P(x) e Q(x) serão as raízes do polinômio MDC. No nosso caso, a raiz comum será, então, -1.

Polinômios primos entre si:
Se alguma divisão chegar a um resto igual a uma constante não nula, os polinômios não possuirão fatores comuns, sendo assim ditos polinômios primos entre si.

Definição 4.7.2

Muitas vezes o algoritmo do MDC não será necessário para determinar as raízes comuns entre dois polinômios. Se soubermos que eles possuem raízes comuns, dependendo da questão, em **alguns casos**, é possível determinar as raízes com uma manipulação algébrica. Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 4.7.a Determine a(s) raízes comuns entre os dois polinômios:

$$\begin{cases}P(x)=x^3-3x^2+x-3\\Q(x)=x^3-x^2+x-1\end{cases}$$

Solução: Vamos supor que haja, de fato, pelo menos uma raiz comum entre P(x) e Q(x). Sendo 'k' esta raiz, podemos escrever:

$$\begin{cases}k^3-3.k^2+k-3=0\\k^3-k^2+k-1=0\end{cases}$$

Temos um sistema simples na variável 'k'. Subtraindo a 1ª equação da 2ª, teremos:

$$2k^2+2=0 \qquad \therefore \quad k=\pm\, i$$

Ou seja, i e – i atendem simultaneamente às equações de P(x) e Q(x). Note que, de fato:

$$\begin{cases}P(\pm i)=(\pm i)^3-3.(\pm i)^2+(\pm i)-3=0\\Q(\pm i)=(\pm i)^3-(\pm i)^2+(\pm i)-1=0\end{cases}$$

Como o polinômio é do 3º grau, e seus coeficientes não são idênticos, a 3ª raiz de cada um deles, não será comum (se quiséssemos, poderíamos determiná-las utilizando o Algoritmo de Briot-Ruffini!).

Ou seja, as raízes comuns entre P(x) e Q(x) são:

$$\boxed{i \text{ e } -i}$$

Exemplo 4.7.b Sabendo que P(x) e Q(x) possuem 2 raízes comuns, determine todas as raízes de cada um deles.

$$\begin{cases}P(x)=x^4-3x^3-x+3\\Q(x)=x^4-15.x^3+65.x^2-105.x+54\end{cases}$$

Solução: Recorrendo ao método anterior vamos chamar de 'k' uma das raízes comuns, de tal forma que possamos escrever

$$\begin{cases}k^4-3.k^3-k+3=0\\k^4-15.k^3+65.k^2-105.k+54=0\end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, teremos:

$$12.k^3-65.k^2+104.k-51=0$$

A priori, não sabemos um método geral para resolver tal equação do 3º grau. Porém, devemos estar atentos e notar que a soma dos coeficientes do polinômio acima é nula. Ou ainda, que:

$$12.(1)^3-65.(1)^2+104.(1)-51=0$$

Ou seja, k = 1 é uma raiz. Descobrimos uma das raízes comuns a P(x) e Q(x). A outra será uma das outras duas restantes no polinômio em k.

Podemos reduzir o polinômio do 3º grau em 'k', pelo Algoritmo de Briot – Ruffini.

	12	-65	104	-51
1	12	-53	51	0

$$\therefore \quad 12.k^3 - 65.k^2 + 104.k - 51 = (k-1).(12.k^2 - 53.k + 51)$$

Determinando as demais raízes do polinômio em 'k', pelo método de Báskara.

$$12.k^2 - 53.k + 51 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{53 \pm \sqrt{53^2 - 4.12.51}}{24} = 3 \text{ ou } \frac{17}{12}$$

Interessa a nós qual dessas duas é raiz comum a P(x) e a Q(x). Substituindo nas expressões de P e Q, verifica-se que:

$$\begin{cases} P(3) = (3)^4 - 3.(3)^3 - (3) + 3 = 0 \\ Q(3) = (3)^4 - 15.(3)^3 + 65.(3)^2 - 105.(3) + 54 = 0 \end{cases}$$

Conhecemos duas raízes de P(x) e duas raízes de Q(x). Para determinar as demais raízes de cada um deles, devemos reduzi-los pelo algoritmo de Briot-Ruffini, individualmente.
Para P(x):

	1	-3	0	-1	3
1	1	-2	-2	-3	0
3	1	1	1	0	

Ou seja, podemos fatorar P(x) como: $P(x) = (x-1).(x-3).(x^2 + x + 1)$

As outras duas raízes de P(x) serão as soluções de:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Ou ainda, temos que todas as raízes de P(x) serão:

$$1,\ 3,\ \frac{-1 + i.\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1 - i.\sqrt{3}}{2}$$

Para Q(x):

	1	-15	65	-105	54
1	1	-14	51	-54	0
3	1	-11	18	0	

Ou seja, podemos fatorar Q(x) como:

$$Q(x) = (x-1).(x-3).(x^2 - 11.x + 18)$$

As outras duas raízes de P(x) serão as soluções de:

$$x^2 - 11.x + 18$$

Ou ainda, temos que todas as raízes de P(x) serão:

1, 3, 2, 9

4.8 Raízes Múltiplas

Definição:
Dizemos que uma raiz k é uma raiz múltipla de um polinômio P(x) quando ela é raiz de P(x) e também raiz do seu quociente da divisão de P(x) por (x–k). Ou ainda, quando P(x) possui o fator (x–k) mais de uma vez em sua fatoração. O número de vezes n em que aparece o fator dirá a ordem de multiplicidade da raiz (se n = 2, trata-se de raiz dupla, se n = 3, raiz tripla, e assim em diante).

Definição 4.8.1

Exemplos:

0 é raiz dupla de $P(x) = x^2 = (x-0).(x-0)$

1 é raiz tripla de $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1).(x-1).(x-1)$

Vamos supor um polinômio, sem perda de generalidade, com uma raiz múltipla de ordem n e demais raízes quaisquer.

$$P(x) = (x-k)^n.Q(x)$$

A expressão acima representa tal polinômio onde Q(x) contém os demais fatores devido às outras raízes de P(x).

Derivando a expressão de P(x) com relação a x (devemos nos atentar que o membro direito trata de um produto de funções dependentes de x):

$$P'(x) = n.(x-k)^{n-1}.Q(x) + (x-k)^n.Q'(x)$$

Evidenciando alguns termos comuns:

$$P'(x) = (x-k)^{n-1}.\left[n.Q(x) + (x-k).Q'(x)\right]$$

Chamando $n.Q(x) + (x-k).Q'(x) = Q_2(x)$, temos:

$$P'(x) = (x-k)^{n-1}.Q_2(x)$$

Resultado:
Se P(x) possui uma raiz k com multiplicidade de ordem n, então k será raiz de P'(x) com multiplicidade de ordem n – 1.

Resultado 4.8.1

Ou seja, se soubermos que um polinômio possui raiz dupla, a tarefa de descobrirmos tal raiz é facilitada ao pesquisarmos seu polinômio derivado. A tarefa é facilitada pelo fato de que o polinômio derivado será sempre de grau uma unidade inferior ao grau do polinômio original.

Exemplo 4.8.a Sabendo que P(x) possui uma raiz dupla determine todas as raízes de cada um deles.

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$$

Solução: Sabemos que P(x) possui raiz dupla. Pelo resultado 4.8.1, sabemos que esta raiz está entre as raízes do polinômio derivado. Pesquisemos então as raízes de P'(x).

$$P'(x) = 3x^2 - 14x + 16$$

Resolvendo a equação do segundo grau:

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow \quad x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4.3.16}}{6} = 2 \text{ ou } \frac{8}{3}$$

Ou seja, de acordo com o resultado 4.7.1, a raiz dupla de P(x) deverá ser ou 2 ou 8/3.

Por inspeção vemos que x = 2 é raiz de P(x) e, portanto será a raiz dupla procurada. Para achar a 3ª raiz do polinômio, basta reduzirmos o grau do mesmo pelo algoritmo de Briot-Ruffini.

	1	-7	16	-12
2	1	-5	6	0
2	1	-3	0	

$$\therefore \quad P(x) = (x-2)^2.(x-3)$$

Raízes de P(x): 2 (raiz dupla) , 3

Exemplo 4.8.b Mostre que o polinômio abaixo não possui raízes múltiplas.

$$P(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2007}}{2007!}$$

Solução: Vamos derivar P(x) em relação a x:

$$P'(x) = \frac{1}{1} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \ldots + \frac{2007.x^{2006}}{2007!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2006}}{2006!}$$

Suponhamos, por absurdo, que exista uma raiz 'k' múltipla deste polinômio. Se k é raiz múltipla, pelo resultado 4.8.1, ela será raiz de P(x) e do polinômio P'(x). Ou ainda:

$$\begin{cases} 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{2!} + \ldots + \frac{k^{2006}}{2006!} + \frac{k^{2007}}{2007!} = 0 \\ 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{2!} + \ldots + \frac{k^{2006}}{2006!} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{k^{2007}}{2007!} = 0 \quad \Rightarrow k = 0$$

Ora, então para que isto ocorra, a raiz deverá ser 0, o que é um **absurdo** pois P(0) = 1 . Por absurdo, fica provado que P(x) não possui raízes múltiplas.

Exemplo 4.8.c (IME 2007) Encontre o polinômio P(x) tal que Q(x) é um polinômio do 6º grau, e que:

$$Q(x)+1=(x-1)^3.P(x) \text{ e } Q(x)+2=x^4.T(x)$$

Solução: Do enunciado, sabemos que Q(x) é um polinômio do 6º grau, divisível por x^4. Podemos escrever:

$$Q(x)+2=x^4.(a.x^2+b.x+c)$$

Além disso, sabemos que o polinômio Q(x) + 1 tem 1 como raiz tripla. Desta forma, pelo resultado 4.7.1, sendo M(x) = Q(x) + 1, teremos que 1 é raiz de M(x), M'(x) e M"(x).

$$M(x)=x^4.(a.x^2+b.x+c)-2+1 \quad \Rightarrow \begin{cases} M'(x)=6.a.x^5+5.b.x^4+4.c.x^3 \\ M''(x)=30.a.x^4+20.b.x^3+12.c.x^2 \end{cases}$$

Como M(1) = M'(1) = M"(1), segue o sistema:

$$\begin{cases} a+b+c-1=0 \\ 6a+5b+4c=0 \\ 30a+20b+12c=0 \end{cases} \quad \therefore\ a=10;\ b=-24;\ c=15$$

Com isso, conhecemos $Q(x)=10.x^6-24.x^5+15.x^4-2$

Para encontrar P(x), nos resta uma simples divisão:

$$P(x)=\frac{Q(x)+1}{(x-1)^3}=\frac{10.x^6-24.x^5+15.x^4-1}{(x-1)^3}$$

Essa divisão pode ser efetuada, por exemplo, pelo algoritmo de Briot-Ruffini:

	10	-24	15	0	0	0	-1
1	10	-14	1	1	1	1	0
1	10	-4	-3	-2	-1	0	
1	10	6	3	1	0		

$$\boxed{P(x)=10.x^3+6.x^2+3x+1}$$

2ª Solução: Há ainda uma segunda solução, um tanto quanto elegante, utilizando os conceitos desta seção.

$$Q(x)+1=(x-1)^3.P(x) \text{ e } Q(x)+2=x^4.T(x)$$

Derivando as equações do enunciado com respeito à variável x, chegamos a:

$$\begin{cases} Q'(x)=3.(x-1)^2.P(x)+(x-1)^3.P'(x) \\ \quad =(x-1)^2.[3.P(x)+(x-1).P'(x)] \\ \quad =(x-1)^2.M_1(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q'(x)=4.x^3.T(x)+x^4.T'(x) \\ \quad =x^3.[4.T(x)+T'(x)] \\ \quad =x^3.M_2(x) \end{cases}$$

Ou seja, concluímos que x^3 e $(x-1)^2$ são fatores de Q'(x). Como Q(x) é do 6º grau, Q'(x) é do 5º grau. Temos, então, ainda, todas as raízes de Q'(x).

$$Q'(x)=a.x^3.(x-1)^2=a.(x^5-2.x^4+x^3)$$

Para voltarmos a Q(x), basta integrarmos Q'(x) com respeito a x:

$$Q(x)=\int Q'(x).dx=a.\left(\frac{x^6}{6}-\frac{2.x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+C\right)$$

Das equações (i) e (ii), segue que: $Q(1)=-1$ e $Q(0)=-2$.

A partir daí, tiramos as constantes da expressão de Q(x).

$$\begin{cases} Q(0)=a.C=-2 \\ Q(1)=a.\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{5}+\frac{1}{4}+C\right)=-1 \end{cases} \quad \therefore\ a=60\ ;\ c=-\frac{1}{30}$$

Com isso: $Q(x)=10.x^6-24.x^5+15.x^4-2$, e com isso, novamente:

$$P(x)=\frac{Q(x)+1}{(x-1)^3}=\frac{10.x^6-24.x^5+15.x^4-2}{(x-1)^3}=10.x^3+6.x^2+3.x+1$$

4.9 Exercícios de Fixação

Exercício 4.1 (ITA – 2005 adaptada) O número complexo 2 + i é raiz do polinômio $x^4 + x^3 + p.x^2 + x + q$ com p, q sendo reais. Determine todas as raízes do polinômio.

Exercício 4.2 (IME/ITA) Mostre que é racional:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

Exercício 4.3 (ITA – 2003) Sejam a, b, c, d constantes reais. Sabendo que a divisão de $x^4 + a.x^2 + b$ por $x^2 + 2x + 4$ é exata, e que a divisão de $x^3 + c.x^2 + dx - 3$ por $x^2 - x + 2$ tem resto igual a – 5. Determine o valor de a + b + c + d.

Exercício 4.4 (IME) O polinômio P(x) de grau 2n + 1 tem todos os seus coeficientes iguais a 1. Ao dividirmos P(x) por D(x) do 3º grau encontramos o resto R(x). Sabendo que as raízes de D(x) são distintas e são raízes de $x^4 - 1$ e D(1) é não nulo, determine R(x).

Exercício 4.5 (IME-1979) Resolva as equações abaixo sabendo-se que a primeira tem uma raiz cujo valor é o triplo do valor de uma raiz da segunda.

$$\begin{cases} x^3 - 7.x^2 - 204x + 1260 = 0 \\ x^3 - 15.x^2 - 394x + 840 = 0 \end{cases}$$

Exercício 4.6 (IME-1983) Determine os valores de m para os quais as raízes da equação biquadrada abaixo sejam reais e estejam em progressão aritmética.

$$x^4 - (3m+5).x^2 + (m+1)^2 = 0$$

Exercício 4.7 Demonstre as relações de Girard (Resultado 4.4.1) pelo processo de Indução Finita.

Exercício 4.8 (IME - 2006) Considere o polinômio:

$$x^5 - 3.x^4 - 3.x^3 + 27.x^2 - 44.x + 30$$

Sabendo que o produto de duas de suas raízes complexas é igual a 3 – i e que as partes reais e imaginárias de todas as suas raízes são inteiras e não-nulas, calcule todas as raízes do polinômio.

Exercício 4.9 (IME) Sem resolver a equação, calcule o valor do somatório dos inversos dos cubos das raízes (para m inteiro maior que zero):

$$m.x^4 + 8.x^3 - 139.x^2 - 18.x + 9 = 0$$

Exercício 4.10 Determine as soluções da equação abaixo dados que uma das raízes é igual à soma das outras duas. $36.x^3 - 12.x^2 - 5x + 1 = 0$

Exercício 4.11 (IME - 1995) Determine o valor de b para que o polinômio, de coeficientes reais, $x^4 + a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$ tenha quatro raízes não-reais, duas somando 3 + 4.i e as outras duas com produto 13 + i.

Exercício 4.12 (IME – 2006 adaptada) Seja p(x) um polinômio do 5º grau com coeficientes inteiros (sendo o coeficiente do termo de maior grau unitário). Sabe-se que as cinco raízes de p(x) são números inteiros positivos, sendo quatro deles pares e um ímpar. O número de coeficientes pares de p(x) é?

Exercício 4.13 Mostre que a fatoração a seguir é válida.

$$(1 + x + x^2 + x^3)^2 \equiv 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6$$

Exercício 4.14 (IME - 2003) As raízes distintas do polinômio a seguir são $z_1, ..., z_n$. $P(x) = x + 2.x^2 + 3.x^3 + ... + 23.x^{23} + 24.x^{24} + 23.x^{25} + ... + x^{47}$
Seja b_k a parte real de $z_k{}^2$. Determine o valor da soma: $|b_1| + |b_2| + ... + |b_n|$

Exercício 4.15 (IME - 2000) Determine todos os números inteiros m e n para os quais o polinômio $2.x^m + a^{3n}.x^{m-3n} - a^m$ é divisível por x + a, onde a é não-nulo.

Exercício 4.16 O valor da soma das raízes comuns às equações é

$$\begin{cases} x^4 - 7.x^3 + 16.x^2 - 15.x + 3 = 0 \\ x^4 - 3.x^3 - x^2 - 7.x + 2 = 0 \end{cases}$$

Exercício 4.17 (IME – 2004 adaptada) Determine o valor das raízes comuns das equações:

$$\begin{cases} x^4 - 2x^3 - 11.x^2 + 18.x + 18 = 0 \\ x^4 - 12x^3 + 44.x^2 - 32.x - 52 = 0 \end{cases}$$

Exercício 4.18 Determine o polinômio do 3º grau que satisfaça $P(x-1) = P(x) + (2x)^2$ e utilize o resultado para determinar a soma:

$$2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2$$

Exercício 4.19 (ITA – 1994) A identidade abaixo é valida para todo x real, diferente de -1. Determine o valor de a + b + c.

$$\frac{x^3+4}{x^3+1}\equiv 1+\frac{a}{x+1}+\frac{b.x+c}{x^2-x+1}$$

Exercício 4.20 (ITA) Se x^3+px+q é divisível por x^2+ax+b e x^2+rx+s, demonstrar que $b=-r.(a+r)$.

Exercício 4.21 (ITA – 1999) Seja P(x) um polinômio de grau m, A(x) e B(x) polinômios de grau maior que um e admita que existam polinômios C(x) e D(x) tais que a igualdade A(x).C(x) + B(x).D(x) = 1 se verifique para todo x real. Prove que A(x) não é divisível por B(x).

Exercício 4.22 Determine o maior valor de k inteiro para o qual $(x-1)^k$ divide $x^{2n+1}-(2n+1).x^{n+1}+(2n+1).x^n-1$.

Exercício 4.23 (ITA) Verifique a veracidade da afirmação: "Seja P(x) um polinômio de grau m. Mostre que, se P(x) admite raiz inteira, então P(-1).P(0).P(1) é divisível por 3".

Exercício 4.24 (IME - 2001) Determine a condição que os coeficientes de P(x) do quarto grau devem satisfazer para que P(x) = P(1-x) para todo x real. Resolva este exercício utilizando a condição de identidade entre dois polinômios.

Exercício 4.25 (ITA – adaptada) Seja um polinômio P(x) do 6º grau, com P(0) = 1 e tal que: $P(1)=P(-1)=P(2)=P(-2)=P(-3)=P(3)=2$. Determine o valor de P(4).

Exercício 4.26 (IME) Seja um polinômio P(x) do 5º grau tal que a divisão de P(x) por $(x+1)^3$ nos dá resto 1 e a divisão por $(x-1)^3$ nos dá resto -1. Determine P(x). *Sugestão: Monte as equações de divisão euclidiana do enunciado e derive-as com relação à variável x.*

Exercício 4.27 (ITA – 1994) As raízes da equação de coeficientes reais $x^3+a.x^2+b.x+c=0$ são inteiros positivos consecutivos. A soma dos quadrados dessas raízes é igual a 14. Então, quanto vale $a^2+b^2+c^2$?

Exercício 4.28 (ITA - 2005) Dada a equação abaixo, em que m é uma constante real, considere as seguintes informações e determine as verdadeiras e as falsas.

$$x^3+(m+1).x^2+(m+9).x+9=0$$

I. Se m pertence a (-6 , 6) , então existe apenas uma raíz real.
II. Se m = -6 ou m = 6, então existe uma raíz de multiplicidade 2.
III. Qualquer que seja m real, todas as raízes são reais.

Exercício 4.29 (Lidski) Determine todos os valores reais de a e b para os quais as equações abaixo têm duas raízes comuns e determine essas raízes.

$$\begin{cases}x^3+ax^2+18=0\\x^3+bx+12=0\end{cases}$$

Exercício 4.30 Um polinômio P(x) de grau ímpar ordenado com as potências decrescentes de x, tem seus coeficientes em P.A. Calcule P(1) sabendo que o produto das raízes de P(x) vale 1.

Exercício 4.31 Determine as soluções da equação abaixo sabendo que o produto de duas de suas raízes é o simétrico do produto de outras duas.

$$144.x^4-36.x^3-28.x^2+11.x-1=0$$

Exercício 4.32 (Lidski) O sistema de equações abaixo possui raízes reais para qualquer valor real de k. Mostre que a = 0.

$$\begin{cases}a.(x^2+y^2)+x+y-k=0\\x-y+k=0\end{cases}$$

Exercício 4.33 Resolva as equações abaixo, sabendo-se que a segunda tem uma raiz cujo valor é o triplo de uma raiz da primeira.

$$\begin{cases}x^3-10x^2+31.x-30=0\\x^3-21x^2+98x-120=0\end{cases}$$

Exercício 4.34 P(x) é um polinômio de coeficientes inteiros e assume valores ímpares para x = 0 e x = 1. Mostre que P(x) não possui raízes inteiras.

Exercício 4.35 Determine os números reais m, n, p tais que a expressão abaixo independa de x.

$$\frac{(2-m).x^3+(m-1).x^2+(n+1).x+(p-3)}{x^2-6x+1}$$

Exercício 4.36 (IME) Sabendo-se que a equação $x^3 + mx^2 + n = 0$ (m, n reais não nulos) admite raízes complexas de módulo k, exprima m em função de n e k.

Exercício 4.37 (Lidski) Encontre todos os valores reais de p para os quais as raízes da equação $(p-3).x^2 - 2.p.x + 6p = 0$ são reais distintas e positivas.

Exercício 4.38 Determine o valor de k para que a equação a seguir tenha 4 raízes distintas. $P(x) = x^4 - 14.x^2 + 24.x - k$

Exercício 4.39 Mostre que se P(x) de grau n admite n+1 raízes distintas, então P(x) é o polinômio identicamente nulo. *OBS: Utilizaremos este resultado mais a frente no capítulo 5.*

Exercício 4.40 Determine P(0) onde P(x) é um polinômio de grau n – 1 tal que:

$$P(k) = \frac{1}{k+1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Exercício 4.41 (Lidski) Mostre que a equação $x^3 + a.x^2 - b = 0$ onde a e b (b>0) são reais tem uma e somente uma raiz positiva.

Exercício 4.42 Mostre que, dado um real a, qualquer polinômio P(x) pode ser desenvolvido em potências de (x – a). Isto é, o seguinte desenvolvimento pode ser feito:

$$P(x) = A_0 + A_1.(x-a) + A_2.(x-a)^2 + \ldots + A_n.(x-a)^n$$

Exercício 4.43 (IME-1984) Determine o polinômio do 4º grau de coeficiente de 4º grau unitário P(x) tal que P(x) = P(1-x), P(0) = 0 e P(-1) = 6.

Exercício 4.44 Mostre que $x^3 + y^3 + z^3 - 3.x.y.z$ é sempre divisível por $x + y + z$.

Exercício 4.45 Utilize o resultado do exercício 4.42 para mostrar a fórmula de Taylor para polinômios:

$$P(x) = P(a) + P'(a).(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n$$

Exercício 4.46 Demonstre o raciocínio do algoritmo de Briot-Ruffini

Exercício 4.47 Demonstre que se M(x) e N(X) são polinômios não nulos, onde M tem grau maior que N, e R(X) é o resto da divisão de M por N, então o MDC entre M e N é igual ao MDC entre N e R. Explique como esse resultado demonstra o Algoritmo de Euclides para a determinação do MDC entre dois polinômios

Exercício 4.48 Determine todos os polinômios P(x) tais que P(1) = 1 e, pra todo x real:

$$P(x^2+1) = (P(x))^2 + 1$$

Exercício 4.49 Determine todos os polinômios P(x) tais que, pra todo x real:

$$P(x^2) + P(x).P(x+1) = 0$$

Capítulo 5 – Polinômios Equações Algébricas

5.1 Inspeção Algébrica de Raízes

Vimos em várias situações que o problema de descobrir as raízes de uma equação polinomial não necessariamente é uma tarefa fácil. Muitas vezes a alternativa que nos resta para descobrir as raízes é a da "tentativa e erro", aproximando-nos cada vez mais da solução perfeita. É justamente nesse princípio que se baseiam os métodos computacionais de resolução de equações polinomiais.

Falaremos um pouco de métodos numéricos para resolução de equações no capítulo 6. Por enquanto sabemos que dada uma equação polinomial, algumas informações a respeito de suas raízes podem facilitar achar as mesmas. Vejamos algumas novas informações que podem ser também úteis e restringirão um pouco mais nossa busca. Recapitulando os teoremas 4.4.1 e 4.4.2 vistos no capítulo 4:

Teorema
Dado um polinômio de coeficientes reais. Se o mesmo polinômio admite uma raiz complexa com parte imaginária não nula, então seu conjugado também será raiz.

Teorema 4.4.1

Teorema
Dado um polinômio de coeficientes racionais. Se o mesmo polinômio admite uma raiz irracional do tipo $a+\sqrt{b}$, então $a-\sqrt{b}$ também será raiz.

Teorema 4.4.2

Esses dois teoremas junto ao teorema que apresentaremos a seguir formam um conjunto de 3 teoremas que nos permitem estudar mais amplamente uma equação polinomial quanto suas raízes apenas ao olharmos a "aparência" da equação.

Teorema das Raízes Racionais Seja $P(x)=a_0+a_1.x+a_2.x^2+\ldots+a_n.x^n$. Se a fração irredutível p/q (p e q inteiros e primos entre si, $q\neq 0$) é raiz de P(x) então: p divide a_0 e q divide a_n.

Teorema 5.1.1

Demonstração:

Como p/q é raiz de P(x), temos:

$$a_0+a_1.\left(\frac{p}{q}\right)+a_2.\left(\frac{p}{q}\right)^2+\ldots+a_n.\left(\frac{p}{q}\right)^n=0$$

Multiplicando a equação por q^n:

$$a_0.q^n+a_1.p.q^{n-1}+a_2.p^2.q^{n-2}+\ldots+a_{n-1}.q.p^{n-1}+a_n.p^n=0$$

A partir daí, é verdade que:

$$\begin{cases} a_0.q^n=-\left(a_1.p.q^{n-1}+a_2.p^2.q^{n-2}+\ldots+a_n.p^n\right) \\ a_n.p^n=-\left(a_0.q^n+a_1.p.q^{n-1}+a_2.p^2.q^{n-2}+\ldots+a_{n-1}.p^{n-1}.q\right) \end{cases}$$

Evidenciando, no lado direito, p na primeira equação, e q na segunda temos:

$$\begin{cases} a_0.q^n=-p.\left(a_1.q^{n-1}+a_2.p\ .q^{n-2}+\ldots+a_n.p^{n-1}\right) \\ a_n.p^n=-q.\left(a_0.q^{n-1}+a_1.p.q^{n-2}+a_2.p^2.q^{n-3}+\ldots+a_{n-1}.p^{n-1}\right) \end{cases}$$

Como p, q e os coeficientes de P(x) são inteiros, o conteúdo dos parênteses no lado direito das equações é inteiro, e com isso, segue que:

$$\frac{a_0.q^n}{p}\in\mathbb{Z}\quad,\quad\frac{a_n.p^n}{q}\in\mathbb{Z}$$

Lembrando que p e q são irredutíveis (i.e. não é possível simplificar a fração entre p e q), devemos ter que p divide a_0 e q divide a_n, o que conclui a demonstração.

Exemplo 5.1.a Referindo-se ao Exemplo 4.2.d, mostre que cos(20°) não é racional.

Solução: No Exemplo 4.2.d foi mostrado que $y=\cos 20°$ atende ao seguinte polinômio do 3º grau: $8y^3-6y-1=0$ (Eq. I)

Se esse polinômio admitisse raiz racional do tipo p/q irredutível, de acordo com o teorema 5.1.1, a mesma deveria ser tal que p dividisse −1 e q dividisse 8.

As possibilidades de raízes para que isto ocorra são: $\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 1/8$.

Substituindo na equação temos que nenhuma dessas possibilidades são de fato raízes da equação I, e com isso concluímos que cos20° não é racional.

Exemplo 5.1.b (ITA) Qual das opções abaixo é raiz a equação:

$$24.x^5 - 4.x^4 + 49.x^3 - 2.x^2 + x - 29 = 0$$

(a) $x = 2/3$ (b) $x = 11/12$ (c) $x = 3/4$ (d) $x = 4/3$ (e) N.D.A.

Solução:

Esse exercício segue um formato muito adotado pelo ITA, tradicionalmente. Note que em uma prova com muitas questões, como é a prova do ITA, perder tempo com contas é algo que pode atrapalhar e muito o candidato. Em muitos casos a banca propõe questões em que o candidato ou perde muito tempo com as contas ou encontra uma saída rápida para a solução, sem sequer colocar o lápis no papel.

É o caso desta questão. Note que a banca disponibiliza 4 opções de raízes para uma equação do 5º grau, todas fracionárias. Para testar se cada uma delas é raiz, o aluno demoraria um bom tempo, com o risco de errar contas. Deve haver alguma outra saída!

De acordo com o Teorema 5.1.1, se o polinômio admitir uma raiz racional irredutível do tipo p/q, deveremos ter que p divide -29 e q divide 24. Como 29 é primo, para que haja raiz desse tipo, 29 ou -29 deverão aparecer no numerador. Isto não ocorre em nenhuma das opções, portanto a resposta correta da questão é:

(Opção E) Nenhuma das Anteriores

5.2 Equações Recíprocas

Definição

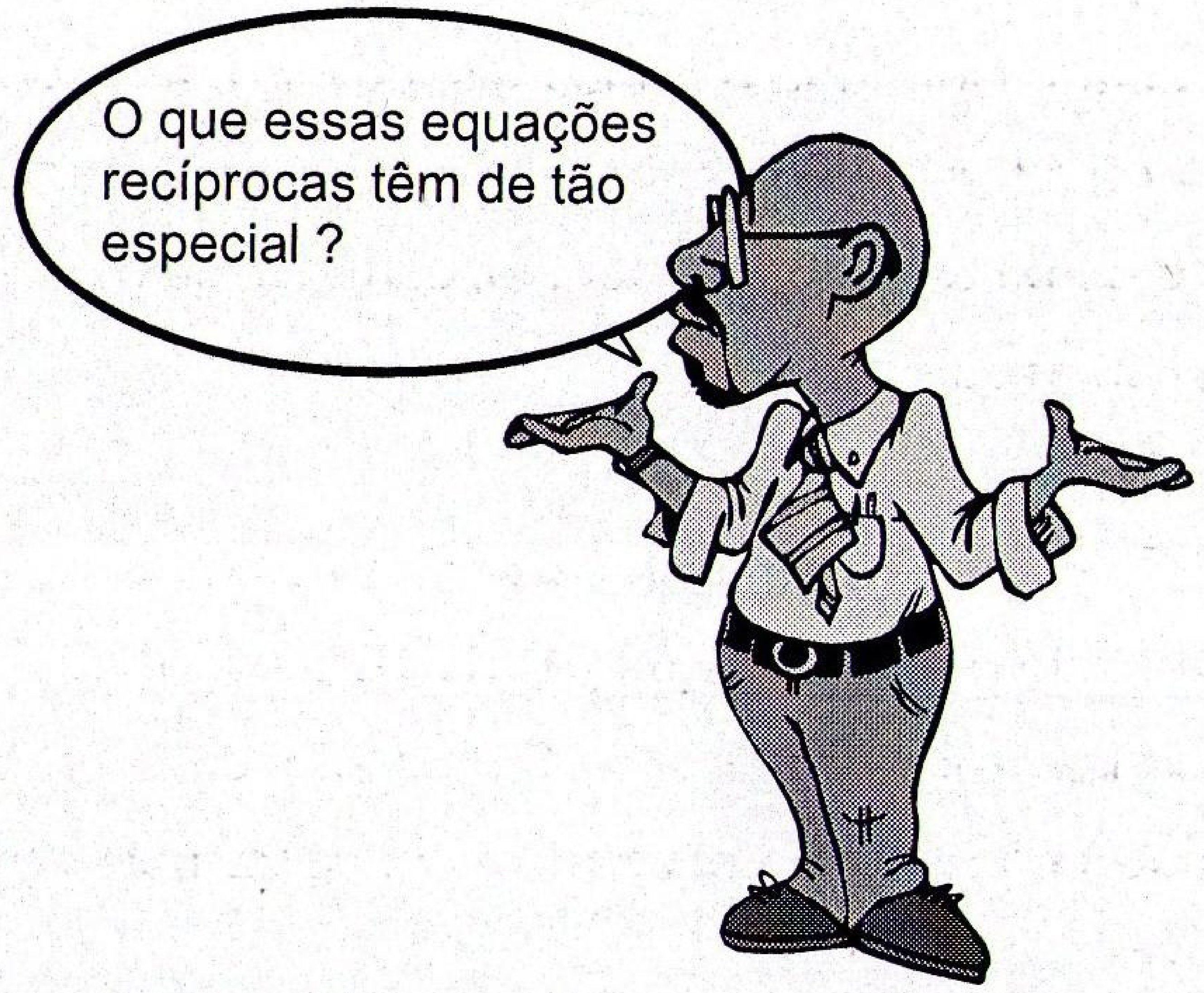
Dizemos que uma equação polinomial é recíproca se, quando o número k atende à equação, tivermos que 1/k também atende.

Definição 5.2.1

OBS: Como o inverso de ‘1’ é o próprio ‘1’, assim como acontece para ‘−1’, não é necessário que essas raízes apareçam em dobro (como raízes duplas) para que formem uma equação recíproca. Se acontecer de ‘1’ ou ‘−1’ serem raízes duplas a equação continua sendo recíproca.

São equações recíprocas as formadas pelos polinômios a seguir:

$$\begin{cases} \text{i) } (x-2).\left(x-\frac{1}{2}\right).(x+1)=0 \\ \text{ii) } (x-4).\left(x-\frac{1}{4}\right).(x-1)^2.(x+1)=0 \\ \text{iii) } (x-5).\left(x-\frac{1}{5}\right).(x+3).\left(x+\frac{1}{3}\right)=0 \\ \text{iv) } (x-1).(x-2).\left(x-\frac{1}{2}\right)=0 \end{cases}$$



Autor: *Veremos que existe método de resolução de equações recíprocas, equações polinomiais de graus altos.*

É sempre fácil reconhecer uma equação como sendo recíproca apenas por sua 'aparência'.

Vamos desenvolver as equações recíprocas do exemplo 5.1 que apresentamos anteriormente, seguindo a mesma ordem do exemplo.

$$\begin{cases} i) & 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0 \\ ii) & 4.x^5 - 21.x^4 + 17.x^3 + 17.x^2 - 21.x + 4 = 0 \\ iii) & 15.x^4 - 28.x^3 - 230.x^2 - 28.x + 15 = 0 \\ iv) & 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \end{cases}$$

As equações recíprocas são caracterizadas por possuírem coeficientes eqüidistantes do centro da equação simétricos ou anti-simétricos, tornando assim possível classifica-las quanto a dois tipos de espécies:

Equação Recíproca de 1ª Espécie
Quando os termos eqüidistantes do centro da equação são iguais, dizemos que a equação recíproca é de *primeira espécie*.

$$a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + a_2.x^{n-2} + ... + a_2.x^2 + a_1.x + a_0 = 0$$

Definição 5.2.2

Equação Recíproca de 2ª Espécie
Quando os termos eqüidistantes do centro da equação são iguais em módulo, porém com sinais contrários, dizemos que a equação recíproca é de *segunda espécie*.

$$a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + a_2.x^{n-2} + ... - a_2.x^2 - a_1.x - a_0 = 0$$

Definição 5.2.3

Nos exemplos anteriores podemos classificar as equações:

$$\begin{cases} i) & 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{(Primeira Espécie)} \\ ii) & 4.x^5 - 21.x^4 + 17.x^3 + 17.x^2 - 21.x + 4 = 0 \quad \text{(Primeira Espécie)} \\ iii) & 15.x^4 - 28.x^3 - 230.x^2 - 28.x + 15 = 0 \quad \text{(Primeira Espécie)} \\ iv) & 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \quad \text{(Segunda Espécie)} \end{cases}$$

Note que as equações (i) e (iv) possuem ambas as raízes 2 e ½ , porém se diferenciam por possuir a 3ª raiz como sendo −1 (no caso de *(i)*) e 1 (no caso de *(iv)*). No entanto a primeira é uma equação *de 1ª Espécie*, e a segunda é uma equação de *2ª Espécie*. Será que a diferença entre a 3ª raiz foi fator determinante para as equações se diferenciarem quanto à espécie também?

Vejamos o que acontece quando, a uma equação recíproca de primeira espécie, multiplicamos o fator (x−1).

$$(x-1).\left(a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + a_2.x^{n-2} + ... + a_2.x^2 + a_1.x + a_0\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(a_0.x^{n+1} + a_1.x^n + ... + a_1.x^2 + a_0.x\right) - \left(a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + ... + a_1.x + a_0\right) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_0}_{b_0}.x^{n+1} + \underbrace{(a_1 - a_0)}_{b_1}.x^n + ... + \underbrace{(a_0 - a_1)}_{-b_1}.x + \underbrace{(-a_0)}_{-b_0} = 0$$

$$\therefore \quad b_0.x^{n+1} + b_1.x^n + b_2.x^{n-1} + ... - b_2.x^2 - b_1.x - b_0 = 0$$

Ou seja, ao multiplicarmos uma equação Recíproca de 1ª Espécie por (x−1), a equação resultante torna-se Recíproca de 2ª Espécie.

Fica como **exercício** ao leitor mostrar que, se multiplicarmos a equação resultante mais uma vez por (x−1), a equação volta a ser de 1ª Espécie. Verifique a veracidade disto com a equação (ii) do Exemplo 5.1. Como resultado desse fato, vem:

Uma equação recíproca de 2ª Espécie sempre terá 1 como raiz com multiplicidade ímpar.

Resultado 5.2.1

OBS: *O leitor atento notou um possível 'furo' no Resultado 5.2.1. A afirmação feita não seria verdade se a equação original (antes da primeira multiplicação por (x – 1) já possuísse 1 como raíz com multiplicidade ímpar. Leitor, você consegue provar que isto nunca acontecerá?*
Ora, se a divisão de uma equação recíproca de 1ª espécie por (x–1) resulta em uma equação de 2ª espécie (na qual x = 1 é sempre raíz pela própria simetria dos coeficientes), então se x = 1 for raíz da original, deverá ser também raíz dupla! Esta análise impede o 'possível furo'.

As raízes recíprocas diferentes de 1 e –1 sempre se encontram em pares em uma equação recíproca. De acordo com Resultado 5.2.1, x = 1 é sempre raiz, figurando com multiplicidade ímpar em uma equação recíproca de 2ª espécie. Isso nos diz que, a menos que -1 também seja incluso como raiz, o grau da Equação Recíproca de 2ª Espécie sob estas condições será ímpar. Ou seja:

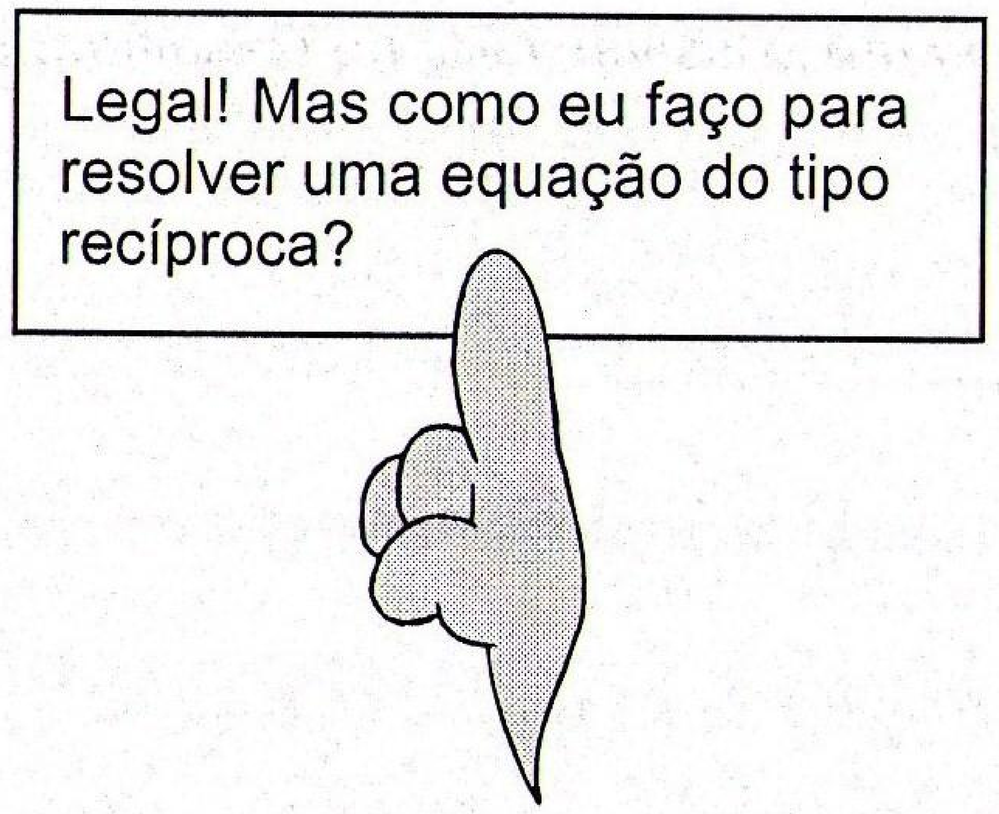
> Uma equação recíproca de 2ª Espécie terá grau par somente quando 1 e –1 forem raízes.

Resultado 5.2.2

Toda equação de 2ª Espécie tem como coeficientes eqüidistantes do centro, números com mesmo módulo, porém com sinais contrários. Como toda equação polinomial de **grau par** possui sempre um **termo central** (que é o próprio centro de simetria dos coeficientes), para que a equação seja recíproca de segunda espécie (ou seja, coeficientes eqüidistantes do centro são simétricos de sinais contrários), e, para que o coeficiente central seja igual ao seu simétrico de sinal contrário, ele deverá ser 0.

> Uma equação recíproca de 2ª Espécie de grau par terá sempre coeficiente central nulo.

Resultado 5.2.3



Existe um método geral para resolver Equações Recíprocas (tanto de 1ª quanto de 2ª espécie). Vamos mostrar o método, resolvendo, como exemplo, a equação recíproca: $2.x^6 - 7.x^5 + 7.x^4 - 7.x^2 + 7.x - 2 = 0$

Método para Resolução de Equações Recíprocas

1º Passo: O primeiro passo será sempre reduzir a equação retirando todas as raízes 1 e -1 possíveis. Recomenda-se o algoritmo de Briot-Ruffini. No nosso exemplo, só há uma raiz 1 e uma raiz -1:

	2	-7	7	0	-7	7	-2
1	2	-5	2	2	-5	2	0
-1	2	-7	9	-7	2	0	

$$\therefore\ (x-1).(x+1).(2.x^4 - 7.x^3 + 9.x^2 - 7.x + 2) = 0$$

2º Passo: Sabendo o polinômio que contem as demais raízes, dividiremos sempre a equação por x^n onde n é o grau do expoente central da equação. No nosso exemplo, dividiremos a equação resultante por x²:

$$2.x^4 - 7.x^3 + 9.x^2 - 7.x + 2 = 0 \qquad (\div x^2)$$
$$\Rightarrow\ 2.x^2 - 7.x + 9 - 7.\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$
$$\Rightarrow\ 2.\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0$$

Devido à simetria da equação recíproca, este agrupamento feito acima *sempre* será possível.

3º Passo: Fazemos uma simples transformação, chamando:

$$x+\frac{1}{x}=y$$

Elevando ao quadrado: $x^2+2.x.\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=y^2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$

4º Passo: Substituímos a transformação na equação e resolvemos a equação do 2º grau em y:

$$2.\underbrace{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}_{y^2-2}-7\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)}_{y}+9=0$$

$$\Rightarrow 2.y^2-4-7.y+9=0$$
$$\Rightarrow 2.y^2-7.y+5=0$$
$$\Rightarrow y=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4.2.5}}{2.2}=\frac{5}{2} \text{ ou } 1$$

5º Passo: Voltamos à variável x e resolvemos duas simples equações do 2º grau:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \text{ (i) ou } x+\frac{1}{x}=1 \text{ (ii)}$$

Resolvendo (i):

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2+2=5.x$$
$$\Rightarrow 2x^2-5x+2=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-4.2.2}}{2.2}=2 \text{ ou } \frac{1}{2}$$

Resolvendo (ii):

$$x+\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2+1=x$$
$$\Rightarrow x^2-x+1=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1\pm i.\sqrt{3}}{2}$$

Temos, então, todas as raízes da equação recíproca:

$$\boxed{1,-1,\frac{1+i.\sqrt{3}}{2},\frac{1-i.\sqrt{3}}{2},2,\frac{1}{2}}$$

Exemplo 5.2.a (ITA) – Sabendo-se que a equação abaixo de coeficientes reais, é uma equação recíproca de segunda espécie, então o número de raízes reais desta equação é?

$$x^6-(a+b+c).x^5+6.x^4-3.c.x^2+6.x-1=0$$

Solução:

Se a equação é uma recíproca de 2ª espécie, então termos simétricos em relação ao termo central nulo devem ser iguais em módulos, porém de sinais contrários. Sendo assim, a equação é:

$$x^6-6.x^5+6.x^4-6.x^2+6.x-1=0$$

Sabemos que 1 e -1 são raízes (Resultado 5.2.2, uma vez que se trata de uma recíproca de 2ª espécie de grau par). Eliminando tais raízes pelo algoritmo de Briot- Ruffini:

	1	-6	6	0	-6	6	-1
1	1	-5	1	1	-5	1	0
-1	1	-6	7	-6	1	0	

Com isso, a equação se torna: $(x-1).(x+1).(x^4-6.x^3+7.x^2-6.x+1)=0$

Achando as demais raízes:

$$x^4-6.x^3+7.x^2-6.x+1=0 \Leftrightarrow x^2-6.x+7-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}_{y^2-2}-6.\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)}_{y}+7=0$$

$$\Leftrightarrow y^2-6.y+5=0$$

$$\Leftrightarrow y=x+\frac{1}{x}=5 \text{ ou } y=x+\frac{1}{x}=1$$

Resolvendo ambas as equações do segundo grau, teremos todas as raízes (das quais **quatro** são reais):

$$\boxed{\frac{1\pm i.\sqrt{3}}{2},\frac{5\pm\sqrt{21}}{2},\pm1}$$

5.3 Transformadas Polinomiais

Muitas vezes é possível alterar a "aparência" de uma equação polinomial para que ela seja mais facilmente resolvida. Utilizamos este conceito quando resolvemos o Exemplo 4.2.c (volte ao exemplo para relembrar), ao nos depararmos com uma equação do segundo grau biquadrada fazendo uma transformação do tipo:

$$y = x^2$$

Conhecemos métodos analíticos de resolução de equações polinomiais bem específicas (Como é o caso da Solução de Cardano-Tartaglia (Resultado 4.2.1) para a equação do 3º grau, que para ser resolvida deve vir desprovida do termo de 2º grau do polinômio). Seria interessante encontrar maneiras de, dado um polinômio qualquer, por meio de transformações simples, mudar sua aparência de tal forma a satisfazer as condições específicas (como por exemplo a condição para a solução de Cardano-Tartaglia). Essas transformações simples que estudaremos são chamadas *transformadas polinomiais*.

Chamamos de *equação transformatriz* a equação de mudança de variável do polinômio e de *equação transformada* a equação polinomial após aplicada a transformação.

Exemplos:

i) Equação original: $x^3 + 3.x^2 - 2.x + 1 = 0$
Equação transformatriz: $y = x + 2 \Leftrightarrow x = y - 2$

$$(y-2)^3 + 3.(y-2)^2 - 2.(y-2) + 1 = 0$$
$$\therefore \quad y^3 - 3.y^2 - 2y + 9 = 0$$
(Eq. Transformada)

ii) Equação original: $x^2 + x + 1 = 0$
Equação transformatriz: $y = 1/x \Leftrightarrow x = 1/y$

$$(1/y)^2 + (1/y) + 1 = 0$$
$$\therefore \quad y^2 + y + 1 = 0$$
(Eq. Transformada)

Vamos classificar alguns tipos especiais de Transformadas Polinomiais.

1 – Transformadas Aditivas
São transformadas do tipo:

$$y = x + C \qquad C = \text{constante}$$

Definição 5.3.1

Sendo x uma raiz de uma equação polinomial, a equação transformada terá raízes somadas a uma constante C.

2 – Transformadas Multiplicativas
São transformadas do tipo:

$$y = k.x \qquad k = \text{constante}$$

Definição 5.3.2

Sendo x uma raiz de uma equação polinomial, a equação transformada terá raízes iguais às originais multiplicadas pela constante k.

3 – Transformadas Inversas
São transformadas do tipo:

$$y = \frac{1}{x}$$

Definição 5.3.3

Sendo x uma raiz de uma equação polinomial, a equação transformada terá raízes iguais aos inversos das raízes originais.

Exemplo 5.3.a Obter a transformada da equação $x^3 + 2x^2 - 7x + 1 = 0$ cujas raízes são acrescidas de uma unidade.

Solução: Para obter a equação cujas raízes são iguais às raízes da equação dada acrescidas de uma unidade, basta fazermos à transformação:

$$y = x + 1 \iff x = y - 1$$

Substituindo na equação original:

$$(y-1)^3 + 2.(y-1)^2 - 7.(y-1) + 1 = 0$$
$$\Rightarrow y^3 - 3.y^2 + 3y - 1 + 2.y^2 - 4.y + 2 - 7.y + 7 + 1 = 0$$

$$\therefore \quad y^3 - y^2 - 8y + 9 = 0$$
(Eq. transformada)

Exemplo 5.3.b As raízes da equação $x^3 - 3.x^2 + x + 2 = 0$ são a,b e c. Forme a equação cujas raízes são a+b, b+c , c+a .

Solução:

Note que:

$$a + b = (a + b + c) - c$$
$$b + c = (a + b + c) - a$$
$$a + c = (a + b + c) - b$$

Pelas relações de Girard, temos que $a + b + c = (S_G^1) = 3$. Ou seja, dado que as raízes da equação original são a,b e c, desejamos determinar uma equação cujas raízes são $3 - a,\ 3 - b,\ 3 - c$.

Utilizamos, então, a transformatriz: $y = 3 - x$.

$$(3-y)^3 - 3.(3-y)^2 + (3-y) + 2 = 0$$
$$\Rightarrow 27 - 27y + 9y^2 - y^3 - 27 + 18y - 3y^2 + 3 - y + 2 = 0$$

$$\therefore \quad y^3 - 6.y^2 + 10y - 5 = 0$$

Exemplo 5.3.c Mostre que numa equação recíproca, a transformada inversa não altera a equação e teça um comentário sobre o "porquê" deste resultado.

Solução: Considere a equação recíproca de primeira espécie:

$$a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + a_2.x^{n-2} + \ldots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0 = 0$$

A transformada inversa tem a transformatriz y = 1/x. Substituindo na equação original:

$$a_0.\left(\frac{1}{y}\right)^n + a_1.\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1} + a_2.\left(\frac{1}{y}\right)^{n-2} + \ldots + a_2.\left(\frac{1}{y}\right)^2 + a_1.\left(\frac{1}{y}\right) + a_0 = 0$$

Multiplicando a equação por y^n:

$$a_0 + a_1.y + a_2.y^2 + \ldots + a_2.y^{n-2} + a_1.y^{n-1} + a_0 y^n = 0$$

Que é uma equação de aparência idêntica à equação original. Isto acontece uma vez que as raízes de uma equação recíprocas vêm em pares (para cada raiz, o seu inverso também será raiz), e com isso a transformada inversa não altera as raízes da equação. A demonstração para equações de 2ª espécie é análoga.

Exemplo 5.3.d Determine uma transformada aditiva que elimine o termo do segundo grau da equação: $x^3 - 3.x^2 + x + 2 = 0$

Solução: Queremos determinar o valor da constante C tal que a transformação aditiva y = x + C gere uma equação transformada desprovida do termo de 2º grau.

$$(y-C)^3 - 3.(y-C)^2 + (y-C) + 2 = 0$$
$$\Rightarrow y^3 - 3.y^2.C + 3.y.C^2 - C^3 - 3y^2 + 6.y.C - 3.C^2 + y - C + 2 = 0$$
$$\Rightarrow y^3 + y^2.(-3.C - 3) + y.(3.C^2 + 6.C + 1) + (-C^3 - 3.C^2 - C + 2) = 0$$

Para que a nova equação seja desprovida do termo do 2º grau, devemos igualá-lo a zero de terminar o valor de C que satisfaça a esta condição.

$$-3C - 3 = 0 \quad \therefore \quad C = -1$$

A transformada pedida é: $y = x - 1$

Vejamos agora um resultado muito interessante que pode nos ajudar bastante em exercícios como o Exemplo 5.3.d

Resultado de Transformadas aditivas:
Seja P(x) o polinômio original. Considere a constante α da transformação aditiva $y = x - \alpha$ que elimina o termo de k-ésimo grau de P(x).

Neste caso, vale que a constante α é raiz da k-ésima derivada de P(x) com relação a x.

Resultado 5.3.1

Demonstração:
Considere a equação P(x) = 0 dada por:

$$a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0 = 0$$

Considere, também, a transformação aditiva $y = x - \alpha$. Vamos representar a equação transformada por:

$$a_n'.y^n + a_{n-1}'.y^{n-1} + \ldots + a_2'.y^2 + a_1'.y + a_0' = 0$$

A partir da transformatriz, podemos dizer que:

$$\begin{cases} x^n = (y+\alpha)^n = y^n + C_n^1.y^{n-1}.\alpha + C_n^2.y^{n-2}.\alpha^2 + \ldots + C_n^{n-1}.y\ .\alpha^{n-1} + \alpha^n \\ x^{n-1} = (y+\alpha)^{n-1} = y^{n-1} + C_{n-1}^1.y^{n-2}.\alpha + C_{n-1}^2.y^{n-2}.\alpha^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1}.y\ .\alpha^{n-2} + \alpha^{n-1} \\ \ldots \\ x^2 = (y+\alpha)^2 = y^2 + C_2^1.y.\alpha + \alpha^2 \\ x = (y+\alpha) = y + \alpha \end{cases}$$

(Sistema de Equações I)

Aplicando a transformação à equação original:

$$\Rightarrow a_n.(y+\alpha)^n + a_{n-1}.(y+\alpha)^{n-1} + \ldots + a_2.(y+\alpha)^2 + a_1.(y+\alpha) + a_0 = 0$$

(Eq. II)

A partir do sistema de equações I e da equação II é possível relacionar os coeficientes da equação transformada com os coeficientes originais:

$$\begin{cases} a_n' = a_n \\ a_{n-1}' = a_n.\left(C_n^1.\alpha\right) + a_{n-1} \\ a_{n-2}' = a_n.\left(C_n^2.\alpha^2\right) + a_{n-1}\left(C_{n-1}^1.\alpha\right) + a_{n-2} \\ a_{n-3}' = a_n.\left(C_n^3.\alpha^3\right) + a_{n-1}.\left(C_{n-1}^2.\alpha^2\right) + a_{n-2}.\left(C_{n-2}^1.\alpha\right) + a_{n-3} \\ \ldots \\ a_k' = a_n.\left(C_n^{n-k}.\alpha^{n-k}\right) + a_{n-1}.\left(C_{n-1}^{n-k-1}.\alpha^{n-k-1}\right) + \ldots + a_{k+1}.\left(C_{k+1}^1.\alpha\right) + a_k \\ \ldots \\ a_0' = a_n.\left(\alpha^n\right) + a_{n-1}.\left(\alpha^{n-1}\right) + \ldots + a_1.(\alpha) + a_0 \end{cases}$$

Para que o k-esimo termo da equação II seja nulo:

$$a_k' = a_n.\left(\frac{n.(n-1).(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.\alpha^{n-k}\right) + a_{n-1}.\left(\frac{n.(n-1).(n-2)\ldots(n-k)}{k!}.\alpha^{n-k-1}\right)$$
$$+ \ \ldots \ + a_{k+1}.\left(\frac{(k+1)!}{k!}.\alpha\right) + a_k = 0$$

(Eq. III)

Devemos provar que neste caso α é raiz da k-esima derivada de P(x).

$$P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0$$

$$\therefore \begin{cases} P'(x) = a_n.(n)x^{n-1} + a_{n-1}.(n-1)x^{n-2} + \ldots + a_2(2).x + a_1 \\ P''(x) = a_n.(n.(n-1))x^{n-2} + a_{n-1}.((n-1).(n-2))x^{n-3} + \ldots + a_3(3.2).x + a_2 \\ \ldots \\ P^{(k)}(x) = a_n.(n.(n-1)\ldots(n-k+1))x^{n-k} + a_{n-1}.((n-1).(n-2)\ldots(n-k))x^{n-k-1} + \\ \qquad + \ldots + a_{k+1}((k+1).(k)\ldots.3.2).x + a_k \end{cases}$$

$$\therefore\ P^{(k)}(x) = a_n.(n.(n-1)\ldots(n-k+1))x^{n-k} + a_{n-1}.((n-1).(n-2)\ldots(n-k))x^{n-k-1} +$$
$$+ \ldots + a_{k+1}((k+1)k\ldots..3.2).x + a_k$$

(Eq. IV)

Pela aparência das equações III e IV dá para perceber que estamos próximo à conclusão da demonstração.

Multiplicando a Equação III por k! :

$$a_n.\left(n.(n-1).(n-2)\ldots(n-k+1).\alpha^{n-k}\right) + a_{n-1}.\left(n.(n-1).(n-2)\ldots(n-k).\alpha^{n-k-1}\right)$$
$$+ \ \ldots \ + a_{k+1}.\left((k+1).(k)\ldots3.2.\alpha\right) + a_k = 0$$

Comparando com a equação IV, teremos que:

$$P^{(k)}(\alpha) = 0$$

Ou seja, a constante α da transformada aditiva $y = x - \alpha$ que elimina o termo do k-ésimo grau da equação transformada será raíz da k-ésima derivada do polinômio P(x) da equação original P(x) = 0.

Do Resultado 5.3.1 a constante utilizada na transformada aditiva que fará o que desejamos deverá ser raiz da 2ª derivada da equação original.

$$P(x)=x^3+p.x^2+q.x+r \;\Rightarrow\; P'(x)=3.x^2+2.px \;\Rightarrow\; P''(x)=6x+2p$$

$$P''(x)=6x+2p=0 \;\Leftrightarrow\; x=-\frac{p}{3}$$

Façamos, agora, a transformação: $y=x+\frac{p}{3}$

$$x^3+p.x^2+q.x+r=0$$

$$\Rightarrow (y-p/3)^3+p.(y-p/3)^2+q.(y-p/3)+r=0$$

$$\Rightarrow \left(y^3-\cancel{p.y^2}+\frac{p^2.y}{3}-\frac{p^3}{27}\right)+\left(\cancel{p.y^2}-\frac{2.p^2.y}{3}+\frac{p^3}{9}\right)+\left(q.y-\frac{q.p}{3}\right)+r=0$$

$$\Rightarrow y^3+y.\left(\frac{-p^2+3q}{3}\right)+\left(\frac{2p^3}{27}-\frac{q.p}{3}+r\right)=0$$

Relembrando a solução de Cardano-Tartaglia (Resultado 4.2.1) para uma equação do tipo: $y^3+b.y+c=0$:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}}$$

A equação transformada, desprovida do termo do segundo grau é:

$$y^3+y.\underbrace{\left(\frac{-p^2+3q}{3}\right)}_{b}+\underbrace{\left(\frac{2p^3}{27}-\frac{q.p}{3}+r\right)}_{c}=0 \qquad \text{(Eq. I)}$$

Tendo os valores de p, q obteremos os valores de b e c pelas relações mostradas acima na Equação I. Tendo os valores de b e c, a partir do Resultado 4.2.1 temos os valores das raízes em y.

Calma! Não comemoremos ainda! Não se esqueça que a equação original era em 'x'. Tendo os valores de y (raízes da equação transformada) acharemos os valores de x para a equação original uma vez que:

$$x=y-\frac{p}{3}$$

OBS Importante 1: *A primeira vista, pode parecer que a solução de Cardano nos dará apenas uma única raiz para equação do 3º grau. A solução de Cardano envolve uma raiz cúbica de números complexos, gerando, portanto*

(de acordo com a nossa teoria vista nas Seções de Números Complexos, veja a Fórmula 1.5.7) três raízes.

OBS Importante 2: *Ao aplicarmos a expressão de Cardano, muitas vezes cairemos em somas radicais contendo raízes quadradas de números negativos (veja o Contexto Histórico abordados nas seções 1.1 e 4.1). Porém, no exercício de fixação 4.2 nós mostramos que números racionais podem ser "disfarçados" na forma de soma de radicais deste tipo. Procedendo-se da forma como foi feito na solução do Exercício 4.2 (veja capítulo 7 para resolução comentada) podemos descobrir qual é o número racional "disfarçado"***.**

Dica do Autor: *Cabe ressaltar que o processo de resolução de uma equação geral do 3º grau é trabalhoso demais para ser exigido em uma prova de vestibular como do IME e do ITA.Nós mostramos o método aqui visando mais mostrar ao aluno uma importante aplicação das transformadas aditivas do que um método para a resolução de questões envolvendo equações do 3º grau em provas IME/ITA. Portanto:* ***atenção****! Ao se deparar com uma questão que pede para resolver uma equação do 3º grau sem o uso de calculadoras ou utensílios computacionais (como em uma prova de concurso), é muito provável que a saída seja utilizando os diversos outros assuntos já estudados (raízes múltiplas, inspeção de raízes óbvias, etc.) e não utilizando o método de Cardano-Tartaglia generalizado.*

O que pode pegar na hora da prova são essas contas. Achar uma equação resultante de uma transformação aditiva pode ser muito trabalhoso, ainda mais se o grau do polinômio for elevado!

Autor: *Mais uma vez, existe um método conhecido que facilita as contas em uma transformada aditiva. Trata-se de um algoritmo simples. Sua demonstração será feita na forma de exercício ao final deste capítulo.*

Vamos mostrar os passos do algoritmo utilizando um exemplo. Faremos um exemplo com uma equação original de 4ª ordem, porém o método é geral para transformações em polinômios de qualquer ordem.

Ex: Vamos transformar a equação abaixo segundo a equação transformatriz: $y=x+3$.

$$\text{equação original: } x^4+3.x^3-2.x^2+5.x+7=0$$

Algoritmo Para Transformada Aditiva

1º Passo: Montamos um esquema parecido como o utilizado no Algoritmo de Briot-Ruffini. Em cima da linha horizontal vão os coeficientes da equação polinomial original. À esquerda da linha vertical (e abaixo da horizontal) vai a constante k da transformação aditiva: y = x – k. Para o nosso exemplo:

	1	3	-2	5	7
-3					

2º Passo: O procedimento de preenchimento dos espaços abaixo da reta horizontal é o mesmo do utilizado no Algoritmo de Briot-Ruffini.

	1	3	-2	5	7
-3	1	0	-2	11	-26

3º Passo: Repete-se o processo n vezes onde n é o grau do polinômio original (o número à esquerda é sempre a constante k da transformação aditiva y = x – k. Para o nosso exemplo:

	1	3	-2	5	7
-3	1	0	-2	11	-26
-3	1	-3	7	-10	
-3	1	-6	25		
-3	1	-9			

4º Passo: Os coeficientes da equação transformada são os indicados lidos na ordem indicada pela seta.

$$\text{equação transformada}: \ y^4 - 9.x^3 + 25.x^2 - 10.x - 26 = 0$$

Fica como **exercício** pro leitor, verificar algebricamente que este resultado está correto!

5.4 Polinômio Interpolador de Lagrange

Vamos agora discutir um problema de polinômios muito interessante.

Exemplo 5.4.a Determine o polinômio que assume os valores 1, 3, –1 para os seguintes valores de x: 0, 1, 4, respectivamente.

Solução:
Com os três pontos dados podemos, na pior das hipóteses, formar um polinômio do 2º grau, uma vez que temos 3 equações para 3 incógnitas:

$$P(x) = a.x^2 + b.x + c$$

Incógnitas a serem determinadas: a, b, c.

Equações:

$$P(0) = a.0^2 + b.0 + c = 1$$
$$P(1) = a.1^2 + b.1 + c = 3$$
$$P(4) = a.4^2 + b.4 + c = -1$$

Devemos, portanto, determinar a solução do sistema:

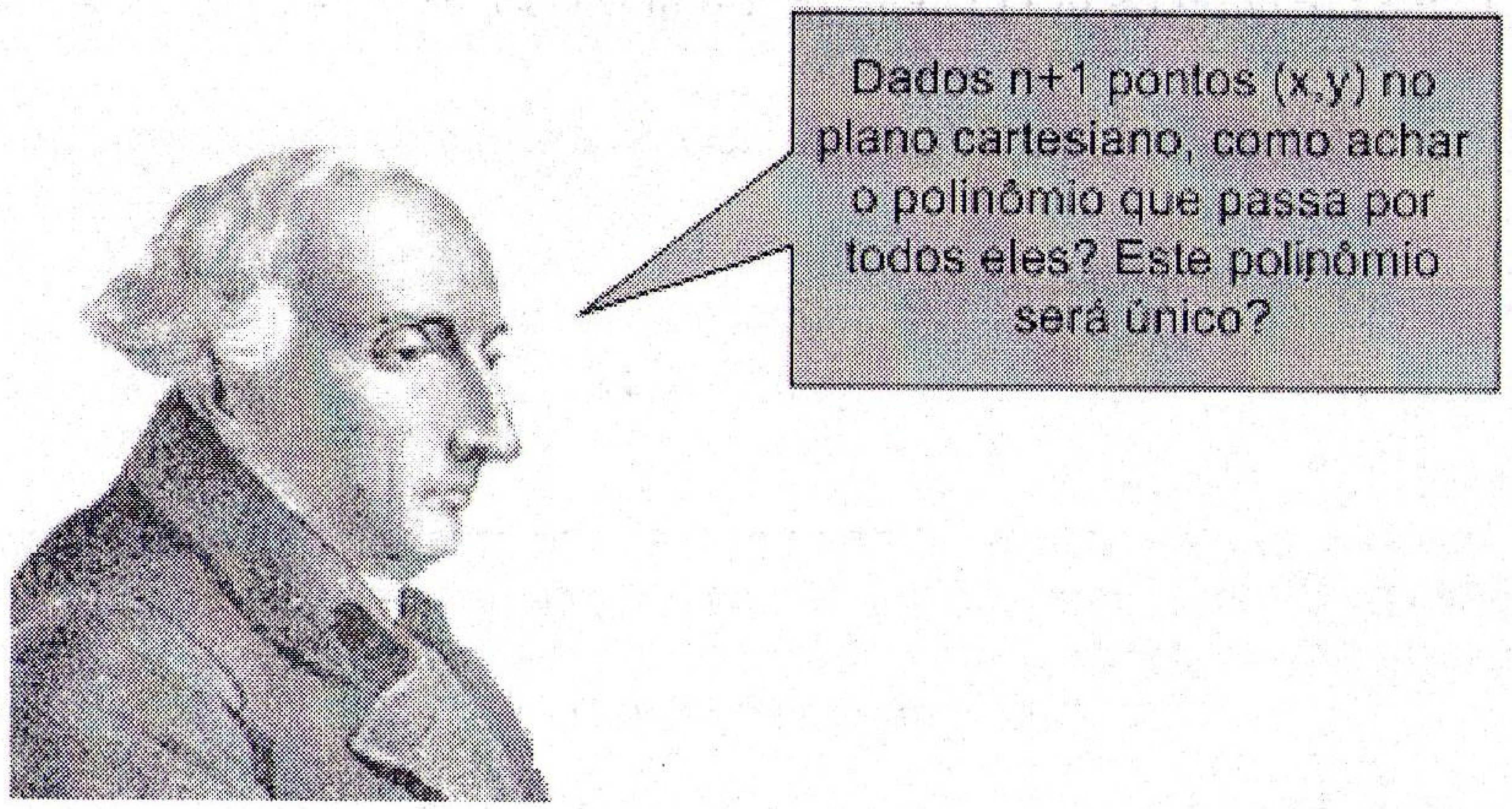
$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 3 \\ 16a + 4b + c = -1 \end{cases} \quad \therefore \quad a = -\frac{5}{6} \ ; \ b = \frac{17}{6} \ ; \ c = 1$$

Logo

$$P(x) = -\frac{5.x^2}{6} + \frac{17.x}{6} + 1$$

OBS 1: Nós dissemos que na pior das hipóteses, poderíamos formar um polinômio do 2º grau. O sistema poderia nos resultar, por exemplo, a = 0, tornando o Polinômio de grau 1. A priori, poderíamos apenas garantir que exista pelo menos um polinômio de grau 2 que satisfaria os pontos dados no enunciado.

OBS 2: Como o sistema gerado pelos pontos dados era um sistema possível e determinado, vimos que a solução existe e é única, i.e., só existe um polinômio que passa por estes 3 pontos. Será que isso sempre acontece?



Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1810)

A resposta à pergunta acima veio do próprio Lagrange, que enunciou o seguinte teorema.

Polinômio Interpolador de Lagrange
Dados n+1 pontos distintos (x,y) no plano cartesiano existe um único polinômio de grau menor ou igual a n que passa por todos estes pontos.

Teorema 5.4.1

Demonstração:
Note que para provar o teorema devemos provar duas coisas distintas: que o polinômio existe e, além disso, é único!

Vamos primeiro provar a **unicidade** do polinômio de Lagrange. Vamos supor que existem dois polinômios distintos P(x) e Q(x) de graus menores ou iguais a n, que passam pelos pontos dados:

$$(x_1, y_1);\ (x_2, y_2);\ \dots;\ (x_{n+1}, y_{n+1})$$

Ou seja, vamos supor que existem P(x) e Q(x) tais que: $\begin{cases} P(x_1) = Q(x_1) \\ P(x_2) = Q(x_2) \\ \dots \\ P(x_{n+1}) = Q(x_{n+1}) \end{cases}$

Ora, mas se definirmos um terceiro polinômio: $h(x) = P(x) - Q(x)$ será verdade que:

$$h(x_1) = P(x_1) - Q(x_1) = 0$$
$$h(x_2) = P(x_2) - Q(x_2) = 0$$
$$\dots$$
$$h(x_{n+1}) = P(x_{n+1}) - Q(x_{n+1}) = 0$$

Ou seja, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ são raízes de h(x), que, portanto, possui n+1 raízes.

Opa! Mas se h(x) = P(x) – Q(x), então o grau de h(x) é também menor ou igual a n. Sendo assim, a partir do resultado provado no exercício de fixação 4.39, como h(x) tem grau menor igual a n e possui n+1 raízes distintas, temos que h(x) é o polinômio identicamente nulo.

$$h(x) = P(x) - Q(x) \equiv 0 \qquad \therefore \qquad P(x) \equiv Q(x)$$

Concluímos então que nunca existirão dois polinômios P e Q distintos, de grau menor ou igual a n, que passam por n+1 pontos distintos dados no plano.

Está provada a **unicidade** do polinômio interpolador de Lagrange, caso ele exista. Resta-nos mostrar que, de fato, ele existe!

Queremos achar um polinômio P(x) tal que:

$$P(x_1) = y_1\ ;\ P(x_2) = y_2\ ;\ P(x_3) = y_3;\ \dots\ ;\ P(x_{n+1}) = y_{n+1}$$

É razoável propormos que P(x) seja algo do tipo:

$$P(x) = y_1.a_1(x) + y_2.a_2(x) + \dots + y_{n+1}.a_{n+1}(x)$$

Onde $a_j(x_i)$ se anule sempre que $j \neq i$ e valha 1 sempre que $j = i$. Note que esta proposta faz com que P(x) passe sempre pelos pontos dados.

Da segunda dessas duas condições, devemos ter:

Lagrange propôs que tomássemos os $a_j(x)$ como sendo da seguinte forma:

$$a_1(x) = \frac{(x-x_2).(x-x_3)....(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2).(x_1-x_3)...(x_1-x_{n+1})} \Rightarrow a_1(x_j) = \begin{cases} 0 \ , \ \text{se } j \neq 1 \\ 1 \ , \ \text{se } j = 1 \end{cases}$$

$$a_2(x) = \frac{(x-x_1).(x-x_3)....(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1).(x_2-x_3)....(x_2-x_{n+1})} \Rightarrow a_2(x_j) = \begin{cases} 0 \ , \ \text{se } j \neq 2 \\ 1 \ , \ \text{se } j = 2 \end{cases}$$

...

Note que no numerador de $a_j(x)$ devemos ter um produto de fatores $(x-x_k)$ exceto $(x-x_j)$. No denominador devemos ter um produto de fatores (x_j-x_k) exceto (x_j-x_j).

Dessa forma, acabamos de construir um polinômio que atende às condições:

$$P(x_1) = y_1 \ ; \ P(x_2) = y_2 \ ; \ P(x_3) = y_3 \ ; \ ... \ ; \ P(x_{n+1}) = y_{n+1}$$

Acabamos de mostrar que o Polinômio Interpolador de Lagrange **existe** e é **único**.

Polinômio Interpolador de Lagrange

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i.a_i(x)$$

Onde: $$a_i(x) = \frac{(x-x_1)...(x-x_{i-1}).(x-x_{i+1})...(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1}).(x_i-x_{i+1})...(x_1-x_{n+1})}$$

são os coeficientes de Lagrange.

Resultado 5.4.2

Exemplo 5.4.b Resolva o Exemplo 5.4.a utilizando agora o Polinômio Interpolador de Lagrange.

Solução: No exemplo 5.4.a é pedido o polinômio P(x) que passa por:

$$x_1 = 0 \ , \ y_1 = 1 \ ; \ x_2 = 1 \ , \ y_2 = 3 \ ; \ x_3 = 4 \ , \ y_3 = -1$$

Sabemos do Teorema 5.4.1, que o polinômio que passa por esses pontos existe e é único. Os coeficientes de Lagrange são facilmente encontrados:

$$\begin{cases} a_1(x) = \dfrac{(x-1).(x-4)}{(0-1).(0-4)} = \dfrac{x^2-5x+4}{4} \\ a_2(x) = \dfrac{(x-0).(x-4)}{(1-0).(1-4)} = -\dfrac{x^2-4x}{3} \\ a_3(x) = \dfrac{(x-0).(x-1)}{(4-0).(4-1)} = \dfrac{x^2-x}{12} \end{cases}$$

O polinômio interpolador de Lagrange para os pontos dados é:

$$P(x) = 1.\left(\frac{x^2-5x+4}{4}\right) + 3.\left(-\frac{x^2-4x}{3}\right) + (-1).\left(\frac{x^2-x}{12}\right)$$

Desenvolvendo

$$\therefore P(x) = -\frac{5.x^2}{6} + \frac{17.x}{6} + 1$$

5.5 Exercícios de Fixação

Exercício 5.1 Com base nos Resultados 5.2.1 e 5.2.2, demonstre matematicamente o Resultado 5.2.3.

Exercício 5.2 (ITA - 1998) Seja a um número real tal que o polinômio abaixo admita apenas raízes reais. Determine o intervalo de validade para a.

$$P(x) = x^6 + 2.x^5 + a.x^4 - a.x^2 - 2.x - 1$$

Exercício 5.3 Nas condições do Teorema das Raízes Racionais (Teorema 5.1.1) mostre que para um inteiro m qualquer $p - m.q$ será divisor de P(m). Como resultado disso, temos que p-q é divisor de P(1) e p+q, de P(-1).

Exercício 5.4 ↯ Dada a equação $x^4 + a.x^3 + b.x^2 + c.x + d = 0$ com a,b,c,d reais, mostre que, se a soma de duas raízes da equação original for igual à soma das outras duas, então a equação transformada $y = x + (a/4)$ é biquadrada.

Exercício 5.5 ↯ Considere a equação $x^3 + 2.x^2 + 15.x + 47 = 0$ de raízes m, n, p. Calcule o valor de:

$$\frac{1}{m^2 - 4m + 4} + \frac{1}{n^2 - 4n + 4} + \frac{1}{p^2 - 4p + 4}$$

Exercício 5.6 Determine a transformatriz da transformada multiplicativa que levou a primeira à segunda equação:

$$\begin{cases} x^3 - 5.x + 10 = 0 \\ y^3 - 80x + 640 = 0 \end{cases}$$

Exercício 5.7 Resolver:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 \ldots + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2 = 2n$$

Exercício 5.8 ↯ Resolva novamente o Exercício 4.40 utilizando, agora, o Polinômio de Lagrange.

Exercício 5.9 ↯ Com o auxílio do resultado mostrado no Exercício de Fixação 4.42, demonstre a lógica do algoritmo para as transformadas aditivas apresentados na seção 5.3.

Exercício 5.10 (ITA-1999) A equação polinomial P(x) = 0 de coeficientes reais e grau 6 é recíproca de 2ª espécie e admite i como raiz. Se P(2) = −105/8 e P(−2) = 255/8, determine a soma de todas as raízes de P(x).

Exercício 5.11 (ITA-2007) Na equação polinomial do 3° grau dada, sejam a,b,c reais. Sabendo-se que esta equação é recíproca de 1ª espécie e que 1 é raiz da equação, determine o produto a.b.c

$$(a + c + 2).x^3 + (b + 3c + 1).x^2 + (c - a).x + (a + b + 4) = 0$$

Exercício 5.12 Resolva novamente o exercício 1.20 dos exercícios de fixação do capítulo 1 (referente a Números Complexos) sabendo agora que a equação analisada trata-se de uma equação recíproca.

Exercício 5.13 (ITA-2007) Determine o máximo entre a, b, c sabendo que os coeficientes a, b,c da equação abaixo representada são reais; que duas raízes da equação são inteiras e distintas e que (1 – i)/2 também é raiz.

$$2.x^4 + a.x^3 + b.x^2 + c.x - 1 = 0$$

Exercício 5.14 Utilize o resultado 5.3.1 para eliminar o termo do 3° grau da equação do 4° grau abaixo e determine a equação transformada resultante.

$$x^4 + a.x^3 + b.x^2 + c.x + d = 0$$

Exercício 5.15 Seja a equação transformada resultante do exercício anterior do tipo da equação: $t^4 + p.t^2 + q.t + r = 0$ Mostre que:

$$\left(t^2 + p\right)^2 = p.t^2 - q.t - r + p^2$$

Exercício 5.16 Continuando a questão 5.13, mostre que, sendo y uma variável arbitrária:

$$\left(t^2 + p + y\right)^2 = (p + 2y).t^2 - q.t + \left(p^2 - r + 2py + y^2\right)$$

Em seguida, note que o lado direito da equação acima pode-se tornar um quadrado perfeito. Mostre que isso acontecerá quando e só quando:

$$\left(q^2 - 4.p^3 + 4.p.r\right) - 8.\left(2.p^2 - r\right).y - 20.p.y^2 - 8.y^3 = 0$$

Exercício 5.17 Baseando-se nas questões 5.13, 5.14 e 5.15 indique os passos de como resolver analiticamente uma equação do 4° grau genérica. Este método é conhecido como método de Ferrari para a resolução analítica das equações do 4° grau.

Capítulo 6
Análise Gráfica de Funções Polinomiais

6.1 Traçando gráficos polinomiais

Até o momento vimos bastante conteúdo a respeito dos polinômios, porém não analisamos a fundo ainda o formato gráfico dessas funções se representadas no plano real R^2. Vamos explorar mais o assunto no percorrer deste capítulo.

> **OBS:** *É sugerido que o leitor, a menos que já possua um conhecimento prévio das propriedades básicas de cálculo diferencial, dê uma breve olhada no Apêndice deste livro e a explicação contida nele na seção 'Cálculo'*

Equações do 1º Grau (retas)

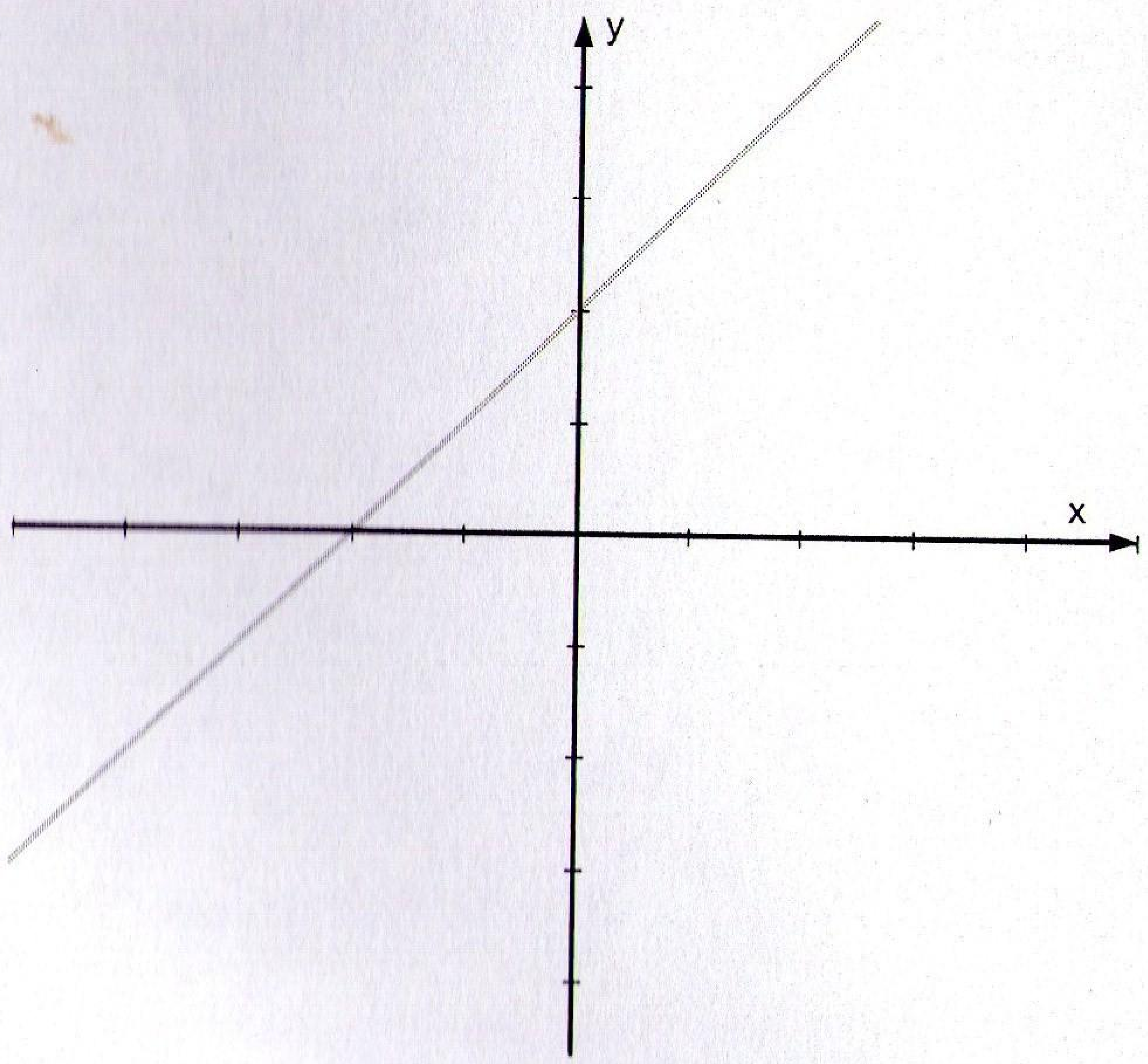


Fig. 6.1.1

Equações do 2º Grau (parábolas)

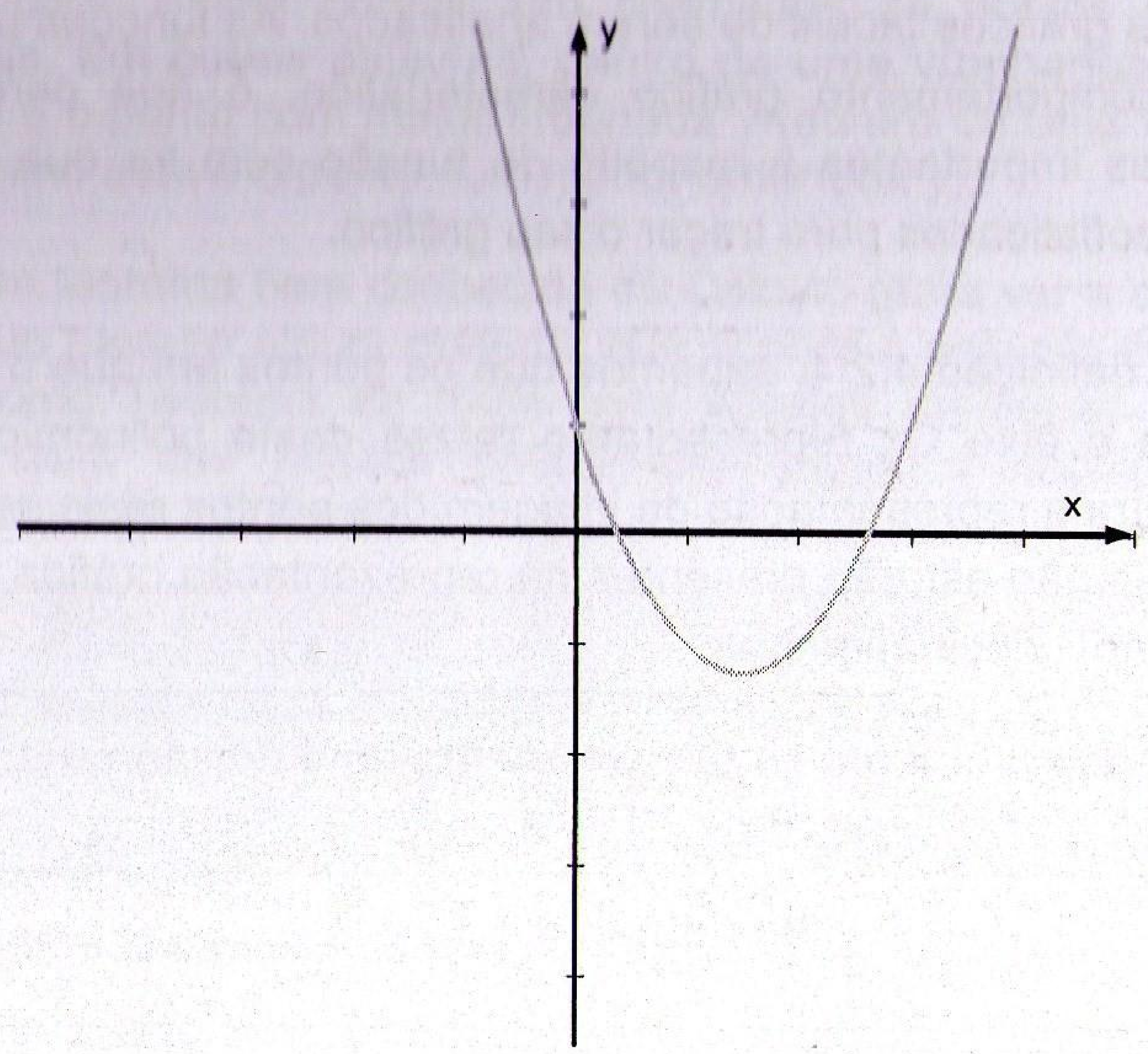


Fig. 6.1.2

Equações do 3º Grau (cúbicas)

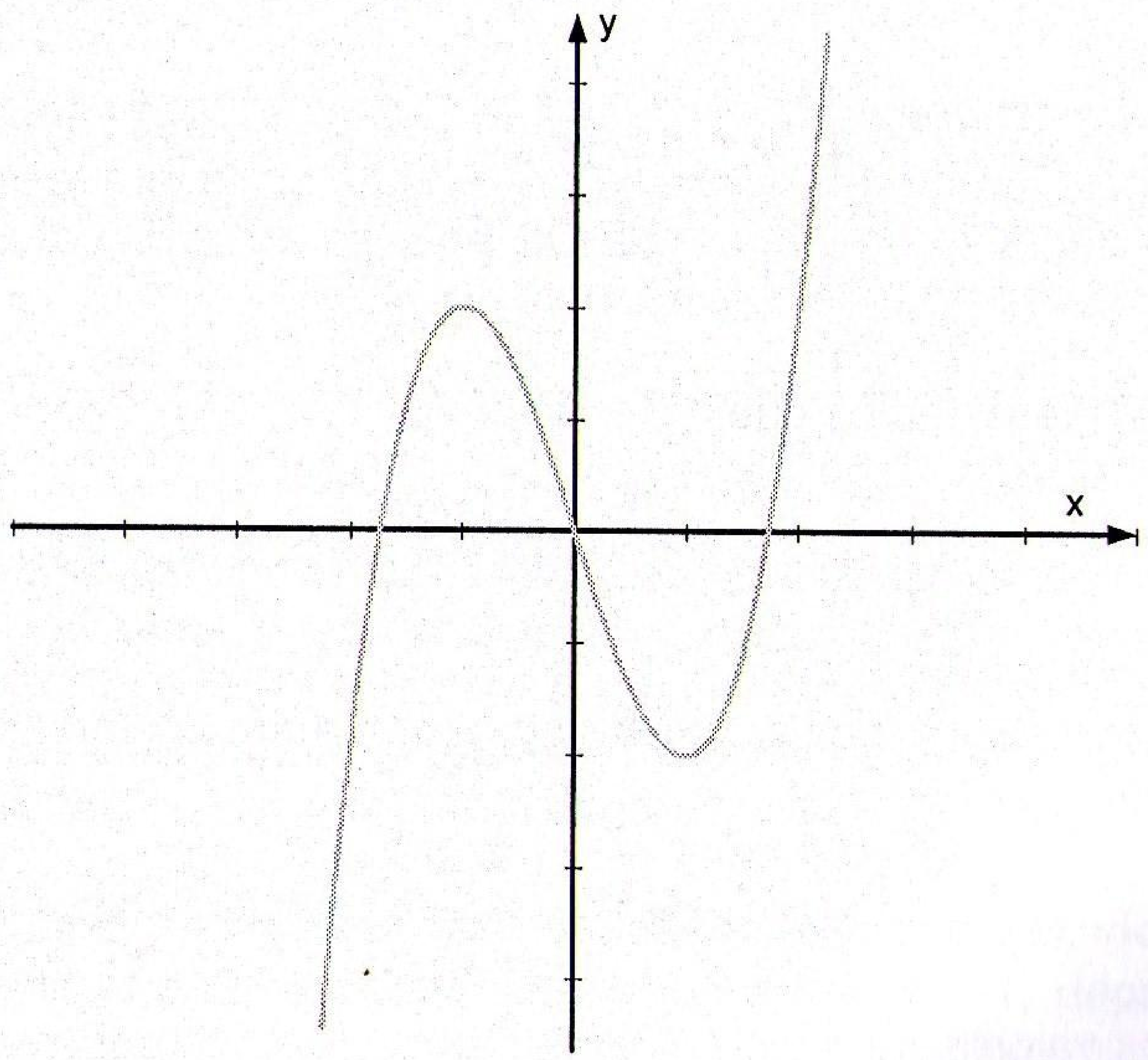


Fig. 6.1.3

Os polinômios são funções contínuas e deriváveis em todo o seu domínio, o que torna o seus gráficos fáceis de serem analisados. As funções polinomiais possuem um comportamento gráfico característico, o que permitirá que façamos análises importantes a respeito da função sem ter que recorrer a métodos muito sofisticados para traçar o seu gráfico.

Diretamente da definição 4.2.4, sabemos que os pontos em que o gráfico do polinômio cruza o eixo Ox representarão raízes deste polinômio. Como o gráfico nos mostra a representação da imagem dos pontos reais pela função, raízes complexas não estarão presentes na representação gráfica. Com esta simples discussão, concluímos que:

> Um gráfico que não cruza o eixo Ox representa uma função que não possui raízes reais.

Resultado 6.1.1

Exemplo 6.1.a Determine os valores reais de a que tornam a função do 2º grau sempre positiva:

$$f(x) = x^2 - a.x + 4$$

Solução:
Note que o ponto (0,4) pertence ao gráfico do polinômio do 2º grau f(x). Para que a função seja sempre positiva, o seu gráfico não pode atravessar para os quadrantes de y negativo do plano real. Ou seja, de acordo com o resultado 6.1.1, a função f(x) não pode ter raízes reais.

Da solução de Báskara, temos que:

$$f(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{2}$$

Para que as raízes sejam todas complexas, o conteúdo do radical deve ser negativo. Ou seja:

$$a^2 - 16 < 0 \qquad \therefore \quad \boxed{|a| < 4}$$

Ou seja, todos os valores de a com módulo menor que 4 tornarão f(x) sempre positiva.

Uma característica bem notável dos gráficos polinomiais é a presença de "vales" e "picos". Esses pontos são chamados de pontos de mínimo e máximo locais. Em outras palavras, dentro de uma vizinhança do ponto de máximo este é o ponto com maior ordenada y (dentro de uma vizinhança do ponto de mínimo este é o ponto com menor ordenada y).

A partir de um teorema bem conhecido do Cálculo (para ver a demonstração sugerimos que procure algum material que aborde o assunto de Derivadas), conhecido como Teorema de Rolle para funções contínuas e deriváveis, como é o caso dos nossos polinômios, segue o seguinte resultado importante, bastante intuitivo:

> Entre duas raízes de um polinômio haverá sempre um máximo ou um mínimo local.

Resultado 6.1.2

Por incrível que pareça, só essa informação já permite que resolvamos alguns exercícios bastante interessantes.

Exemplo 6.1.b Determine o domínio da função:

$$f(x) = \ln(x^3 - x) ,$$

onde ln representa a função logaritmo natural.

Solução: Sabemos que a condição de existência do logaritmo natural é que o logaritmando seja sempre positivo. A questão consiste, portanto, em determinar os intervalos de x em que a seguinte função é positiva:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 - x \\ &= x.(x^2 - 1) \\ &= x.(x-1).(x+1) \end{aligned}$$

Uma simples fatoração nos deu as raízes do polinômio do terceiro grau. Para valores de x próximos a +∞, o polinômio assume valor negativo (o limite quando x tende ao infinito negativo é negativo), e para valores próximos a +∞, o polinômio assume valor positivo (o limite quando x tende ao infinito positivo é positivo).

Ora, sabemos que o polinômio vem do infinito negativo quando x é próximo de −∞; em seguida deve cruzar o eixo Ox em x = −1, depois em x = 0 e finalmente em x = 1, e seguir para o infinito positivo com o aumento indefinido de x. Além disso, do resultado 6.1.2, sabemos que entre cada um

dos cruzamentos com o eixo x, o polinômio tem máximos e mínimos locais. Tais informações já nos dão uma idéia boa a respeito do formato do gráfico de p(x):

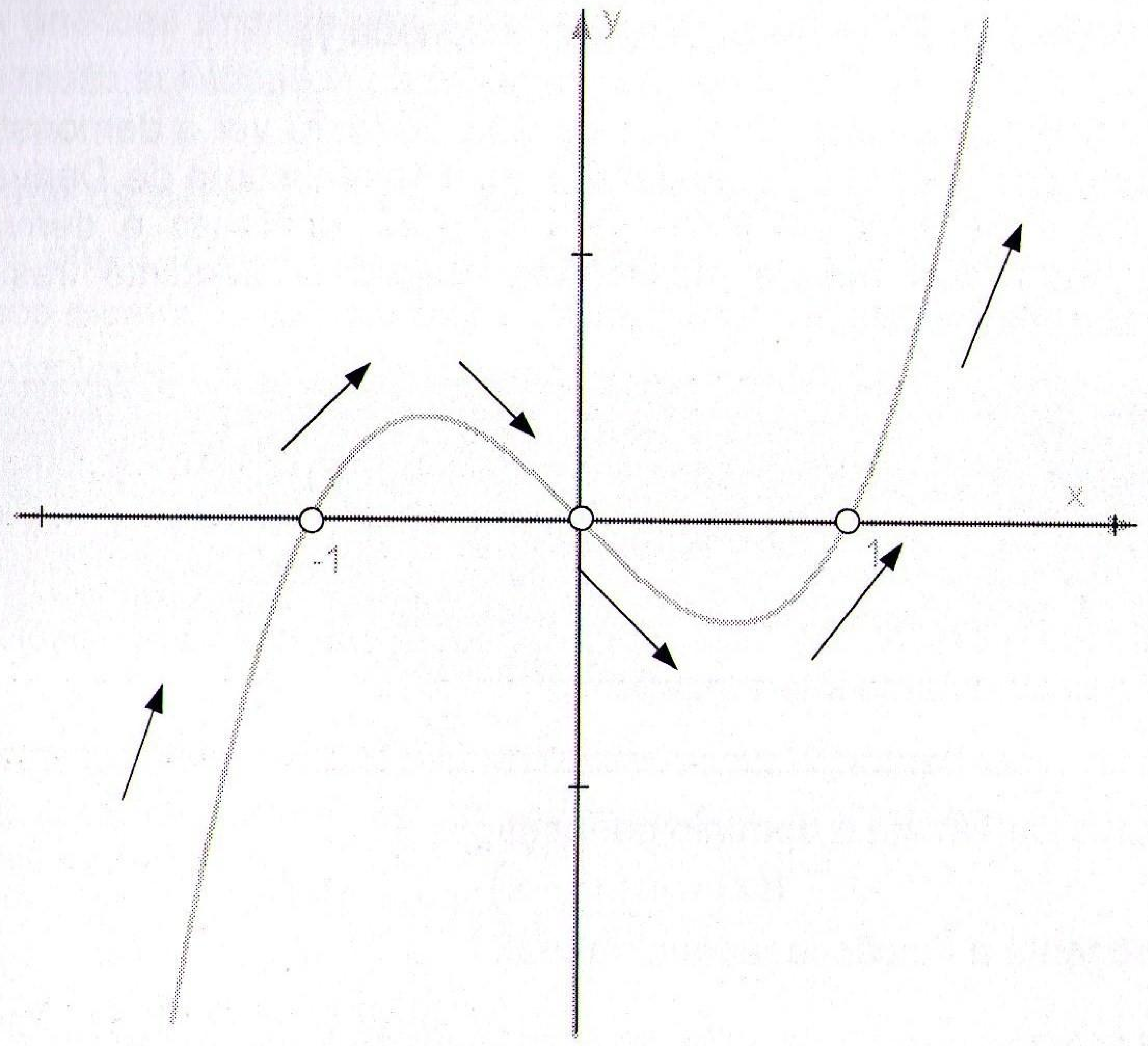


Fig. I

O gráfico da figura I já nos responde a pergunta de quais são os valores de x que tornam o polinômio positivo:

$-1 < x < 0 \quad \text{ou} \quad x > 1$

Já dá pra começar a sentir a importância da análise gráfica ?

Os pontos de máximo e de mínimos locais são pontos do gráfico que possuem inclinação nula. Ou ainda, da definição de derivada (ver Apêndice), são pontos da função que anulam a sua derivada (atenção para o fato de que nem todo ponto para o qual a derivada do polinômio se anula será um ponto de máximo ou mínimo - ver Apêndice).

Se $x = k$ é um ponto de máximo ou de mínimo local de $P(x)$, então $P'(k) = 0$.

Resultado 6.1.3

Ainda do Apêndice, temos:

Se $P'(k) > 0$, então o polinômio é estritamente crescente em $x = k$
Se $P'(k) < 0$, então o polinômio é estritamente decrescente em $x = k$.

Resultado 6.1.4

E, também:

Se $P''(k) > 0$, então a concavidade do polinômio é para cima em $x = k$.
Se $P''(k) < 0$, então a concaviadade do polinômio é para baixo em $x = k$.

Resultado 6.1.5

Os ultimos três resultados nos dizem que, conhecendo as derivadas da função (que no caso do polinômio é facilmente encontrada) e seu comportamento, podemos extrair ainda mais informações a respeito do gráfico do polinômio.

Exemplo 6.1.c Mostre que o polinômio a seguir possui somente uma raíz real.

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 9x - 6$$

Solução:

Como o termo de maior grau é de ordem ímpar, para valores de x próximos a $-\infty$, o polinômio assume valor negativo (o limite quando x tende ao infinito negativo é negativo), e para valores próximos a $+\infty$, o polinômio assume valor positivo (o limite quando x tende ao infinito positivo é positivo).

Essa simples análise nos permite dizer que o polinômio deverá ter pelo menos uma raiz real (como ele assume valores negativos e valores positivos, existirá pelo menos um ponto de cruzamento com o eixo Ox).

Além disso, note que:

$$P'(x) = 9x^2 - 4x + 9$$

O polinômio derivado P'(x) é uma função do segundo grau cujo determinante é dado por:

$$\Delta = 36 - 4.9.9 < 0$$

Analogamente ao Exemplo 6.1.a, como o determinante é negativo, e existem valores positivos de P(x) (como por exemplo P(1) = 14 > 0) , a função do segundo grau será sempre positiva. Com isso:

$$P(x) = (x-3).(x^3+x^2+3x+11)$$

Vimos no exemplo 6.1.c que uma saída interessante pode ser estudar o seu comportamento gráfico. Analisando o polinômio com os demais fatores de P(x):

$$Q(x) = x^3+x^2+3x+11$$

Note que: $Q'(x) = 3x^2+x+3$ é sempre positivo (por motivos análogos à analise feita no exemplo 6.1.c), e com isso, do resultado 6.1.4 temos que Q(x) é estritamente crescente.

Como Q(0) = 11 > 0, e sabemos que Q(x) continuará crescendo a partir de x = 0 , Q(x) não poderá voltar a cruzar o eixo x, em x > 0.

Como ***exercício****, leitor, tente mostrar que P(x) possui sim outra raíz real, porém negativa.*

6.2 Comportamentos Especiais

Polinômios de funções pares

Um polinômio é dito de função par quando, para todo x real, vale que P(x) = P(−x) . Um polinômio será de função par quando possuir apenas os coeficientes acompanhados de potências pares de x.

Exemplos:
São polinômios de funções pares:

$$\begin{cases} P(x) = x^4 - 5.x^2 + 7 \\ P(x) = -x^6 + x^8 + 1 \\ P(x) = x^{2008} \\ \ldots \end{cases}$$

Como P(x) = P(-x) sempre, existirá uma simetria em relação ao eixo das ordenadas no gráfico dos polinômios P(x) de funções pares.

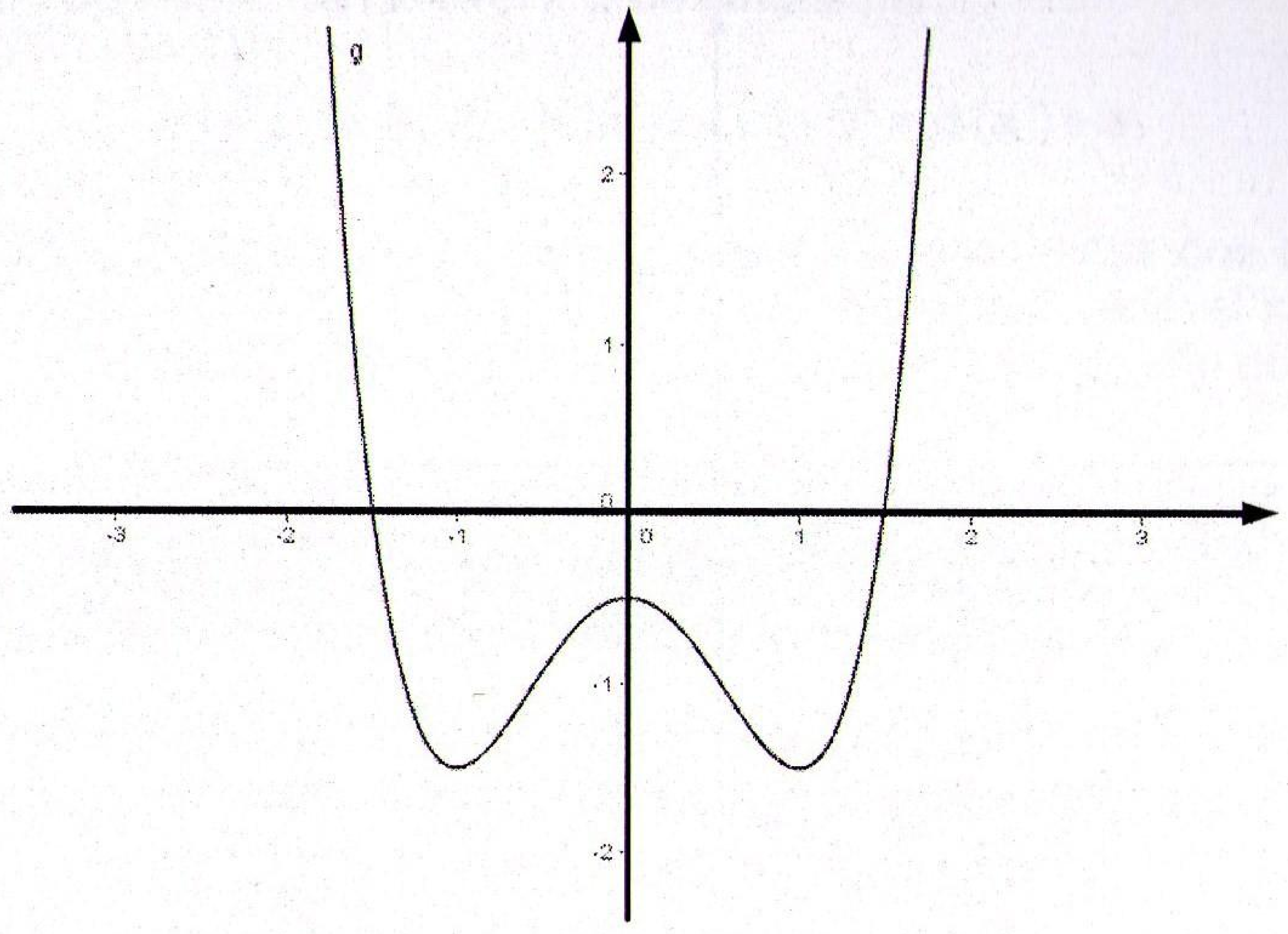


Fig. 6.2.1 – Exemplo de Gráfico de um polinômio de função par

Polinômios de funções ímpares

Um polinômio é dito de função impar quando, para todo x, real vale que:

$$P(x) = -P(-x)$$

Um polinômio será de função ímpar quando possuir apenas os coeficientes acompanhados de potências ímpares de x.

Exemplos:

São polinômios de funções ímpares:

$$\begin{cases} P(x) = x^5 - 9.x^3 \\ P(x) = -x^3 + x^7 + x^9 \\ P(x) = x^{2007} \\ \ldots \end{cases}$$

Como P(x) = − P(−x) sempre, existirá uma simetria em relação à origem do plano cartesiano.

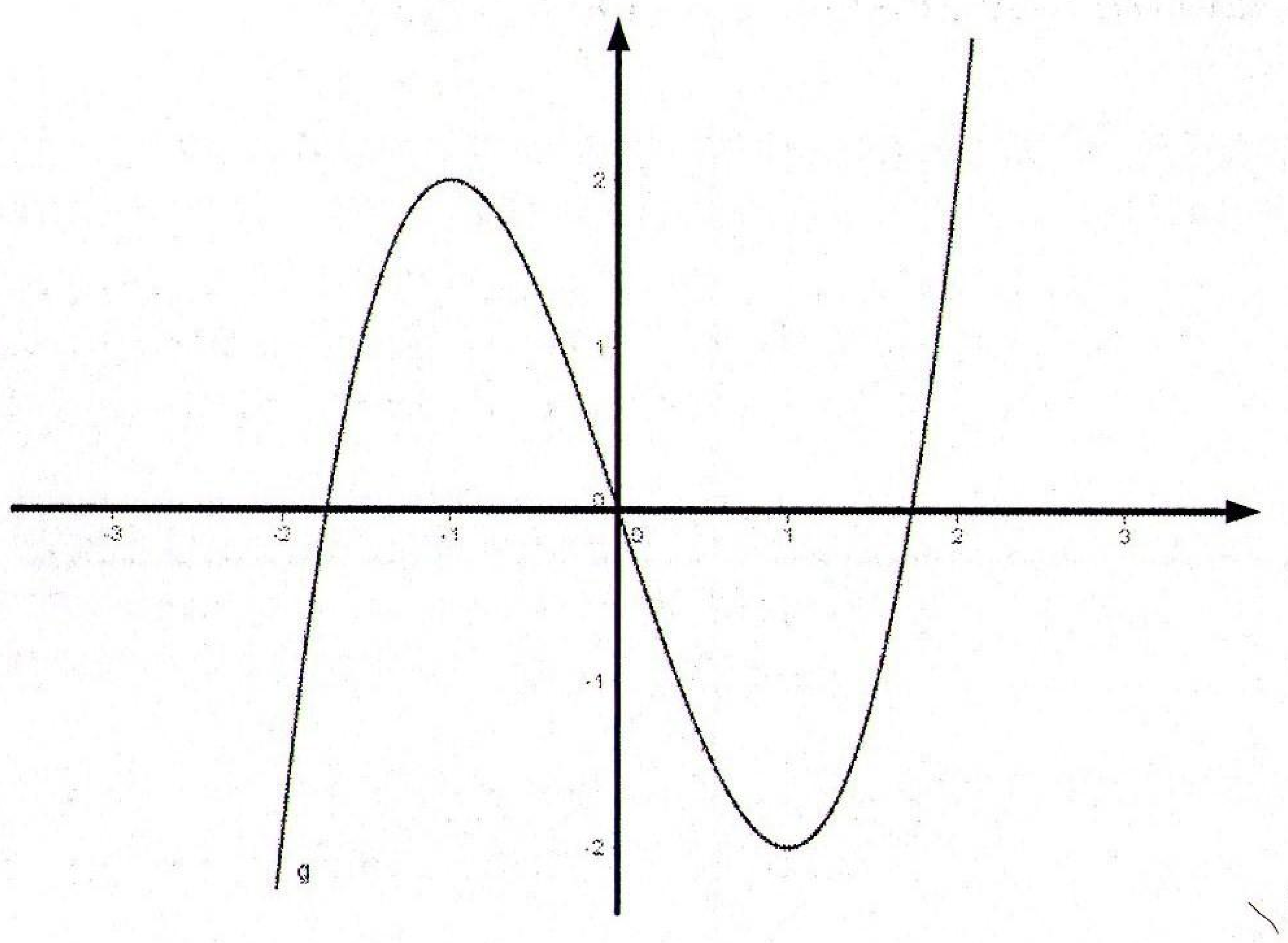


Fig. 6.2.2 – Exemplo de Gráfico de um polinômio de função ímpar

OBS: *Cuidado: se um polinômio não é de função par, não necessariamente será de função ímpar.*

Exemplo 6.2.a (IME 2001) Resolva novamente o exercício de fixação 4.24, propondo uma solução por meio de análise gráfica.

Solução:

Note que, como P(x) = P(1 – x) para todo x real, podemos fazer a seguinte substituição:

$$x = x' + \frac{1}{2}$$

O que nos levará a:

$$P\left(\frac{1}{2} + x'\right) = P\left(\frac{1}{2} - x'\right) \quad \forall x' \in \mathbb{R}$$

Repare que para qualquer valor de x' real, a quantia ½ – x' e ½ + x' darão a mesma imagem no eixo das ordenadas. Ou seja, existe uma simetria do gráfico de P(x) em relação à reta vertical x = ½ .

Ou ainda, o polinômio na variável x' é de função par !

$$P(x') = a.(x')^4 + b.(x')^3 + c.(x')^2 + d.(x') + e$$

Isso nos leva, diretamente, à conclusão que os coeficientes dos termos de expoente ímpar em x' são nulos. (b = d = 0). Voltando à variável x devemos ter que os polinômios que atendem à condição do enunciado são do tipo:

$$P(x) = a.(x - 1/2)^4 + c.(x - 1/2)^2 + e \quad a \in \mathbb{R}^*,\ c, e \in \mathbb{R}$$

Não é difícil mostrar que é o mesmo resultado (escrito diferentemente) obtido na resolução do Exercício 4.24 (deixamos a verificação como **exercício**).

Deslocando o gráfico

No exemplo 6.2.a que acabamos de ver foi feita uma mudança de variáveis do tipo: $x' = x - k$ onde k é uma constante.

Graficamente, essa mudança nos dá o polinômio em um novo referencial (um novo sistema de coordenadas) deslocado k unidades para a direita. Veja a figura abaixo. O mesmo ponto A no sistema xoy tem abcissa a e no sistema x'oy' tem abcissa a' = a – k.

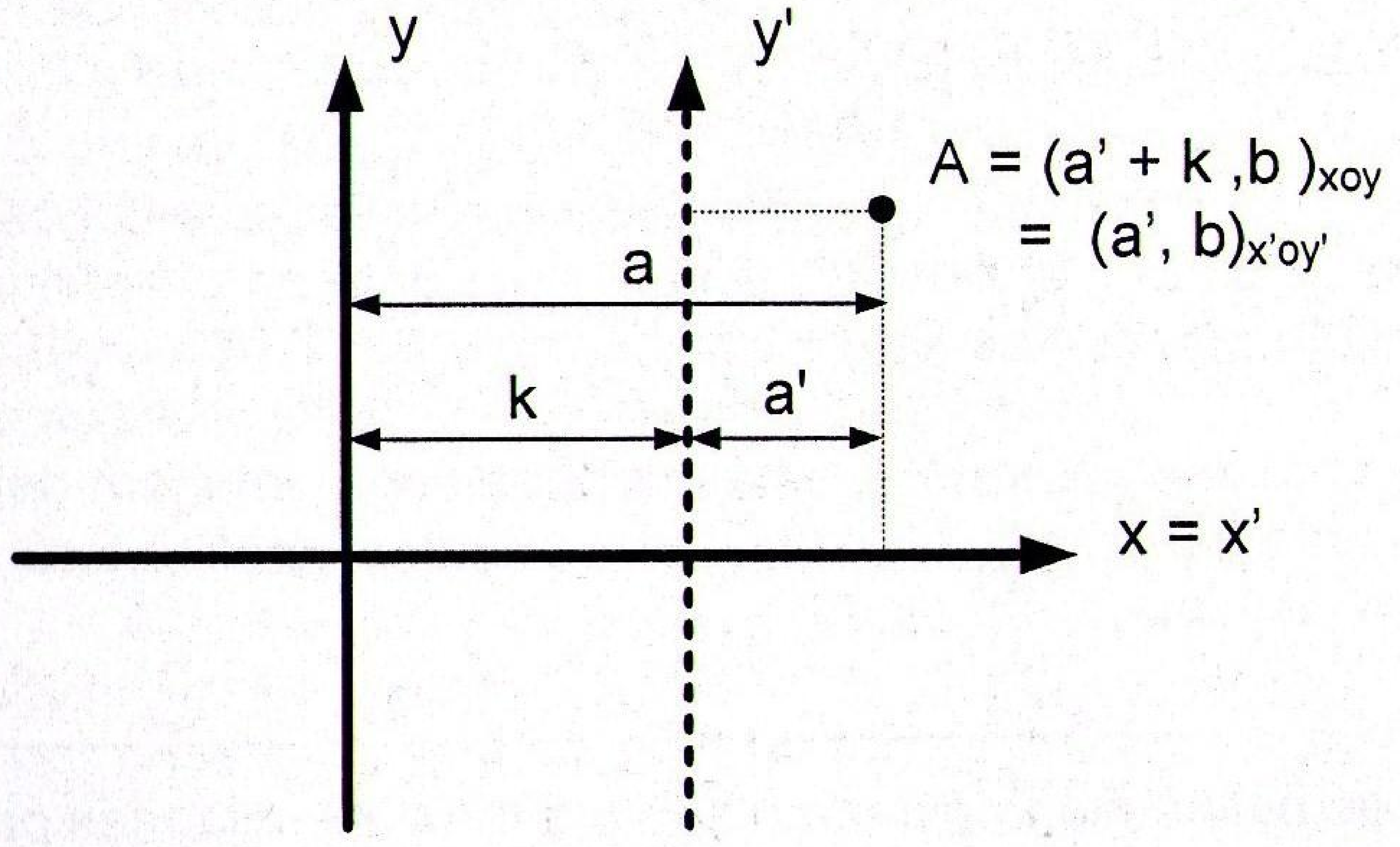


Fig. 6.2.3

Como ficará, portanto, o gráfico de P(x – k) em comparação com o gráfico de P(x)?

Muito bem, o gráfico P(x – k) corresponderá a um gráfico semelhante ao gráfico de P(x), porém representado com referência ao novo sistema de eixos x´oy'. Como a mudança x' = x – k indica um par de eixos à direita do original, é como se o gráfico da função tivesse transladado para a direita em relação ao original.

Veja a comparação entre os gráficos $y = x^2$ e $y = (x - 3)^2$.

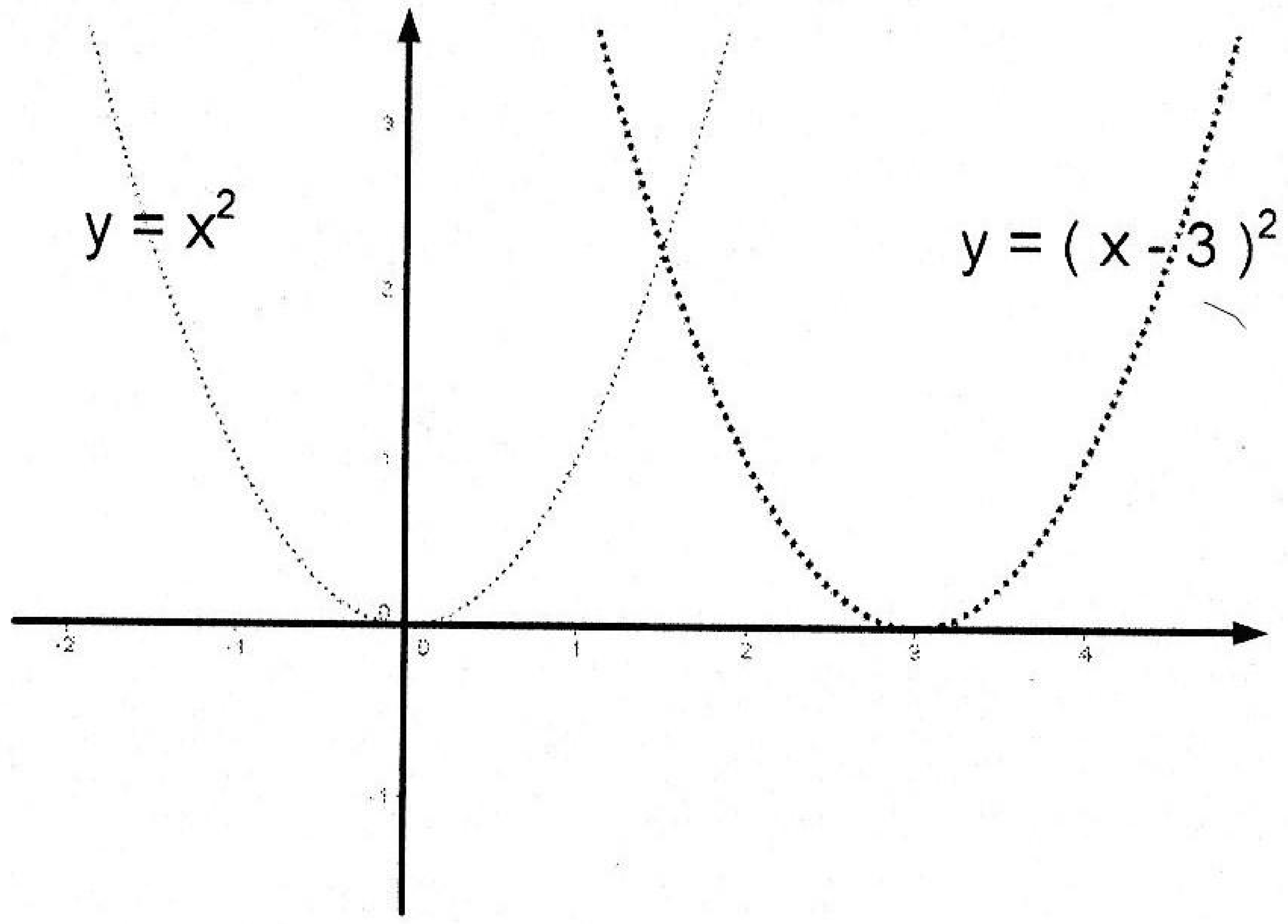


Fig. 6.2.3

Subtrair k do argumento do polinômio translada o eixo k unidades para a direita.

Resultado 6.2.1

O que acontece porém adicionarmos uma constante ao polinômio. Ou ainda, qual é o resultado gráfico de P(x) + k?

Ora, para um mesmo valor de x, estamos tomando a imagem dele sobre P e adicionando uma constante. Ou seja, cada ponto do gráfico terá sua imagem acrescida de k unidades. Ou ainda:

Somar k ao polinômio translada o seu gráfico de k unidades para cima.

Resultado 6.2.2

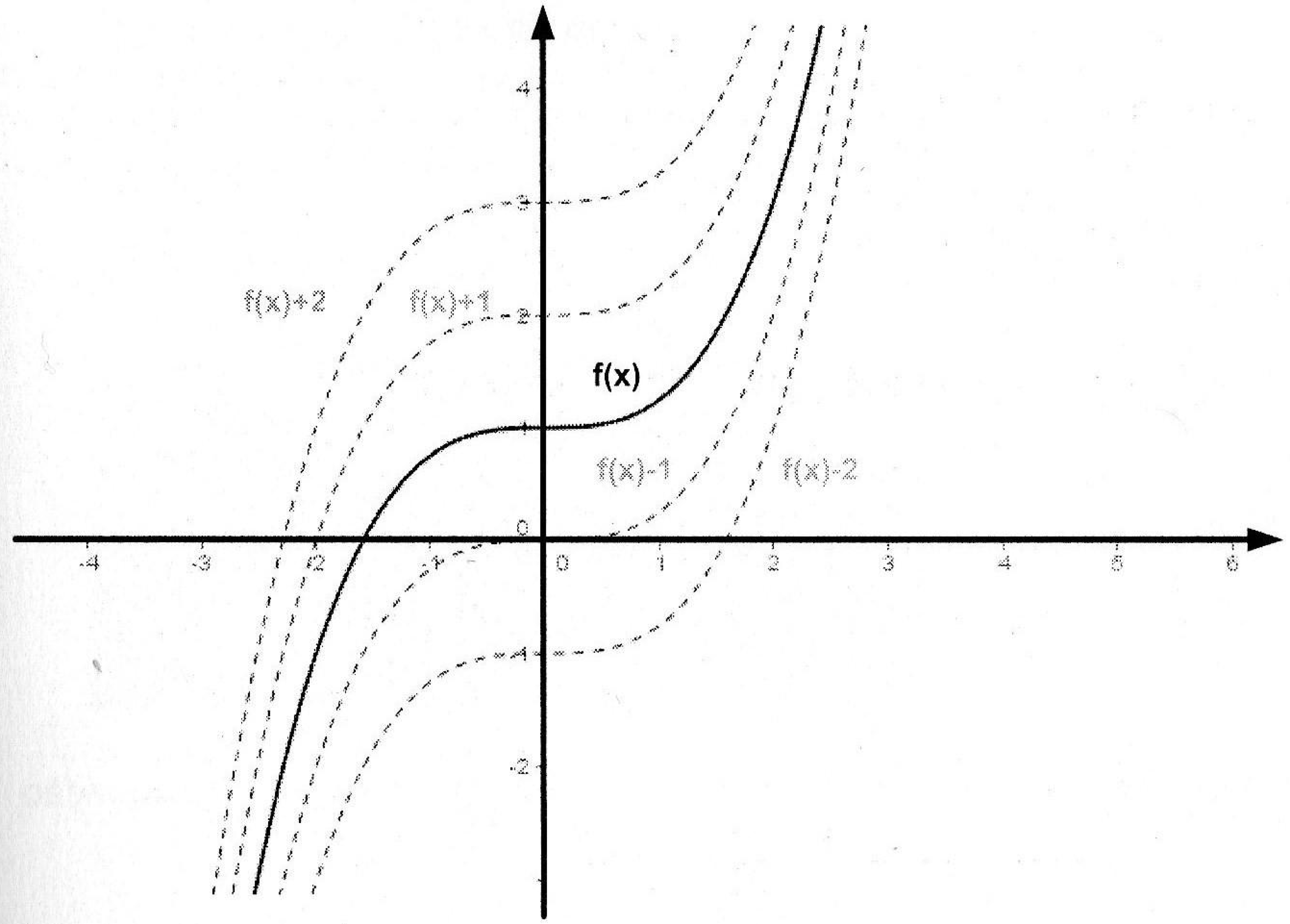


Fig. 6.2.4

As Equações do Segundo Grau

Os gráficos das equações do segundo grau (conhecidos como Parábolas) possuem algumas propriedades interessantes. Uma boa primeira observação é que os gráficos de funções do tipo $a.x^2 + b.x + c$ possuem uma simetria com relação à reta vertical que passa pelo seu vértice.

O vértice da parábola é definido como o único ponto crítico da função, e pode ser facilmente localizado utilizando-se do resultado 6.1.3

$$f(x) = a.x^2 + b.x + c$$

$$f'(x_v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2.a.x_v + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_v = -\frac{b}{2a}}$$

Tendo o valor da abcissa, uma substituição simples nos dará o valor da ordenada do vértice da parábola.

$$f(x_v) = a.\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b.\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = -\frac{b^2 - 4.a.c}{4a} \quad \therefore \quad \boxed{y_v = -\frac{\Delta}{4a}}$$

O teste da segunda derivada (Resultado Apêndice.6) nos permite determinar se o ponto crítico é um ponto de máximo ou de mínimo.

$$f''(x_v) = 2.a \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{se } a > 0 & f \text{ tem concavidade para cima (ponto de mínimo)} \\ \text{se } a < 0 & f \text{ tem concavidade para baixo (ponto de máximo)} \end{cases}$$

Ou seja, apenas do sinal do coeficiente do termo de maior grau da equação quadrática conhecemos a concavidade do seu gráfico.

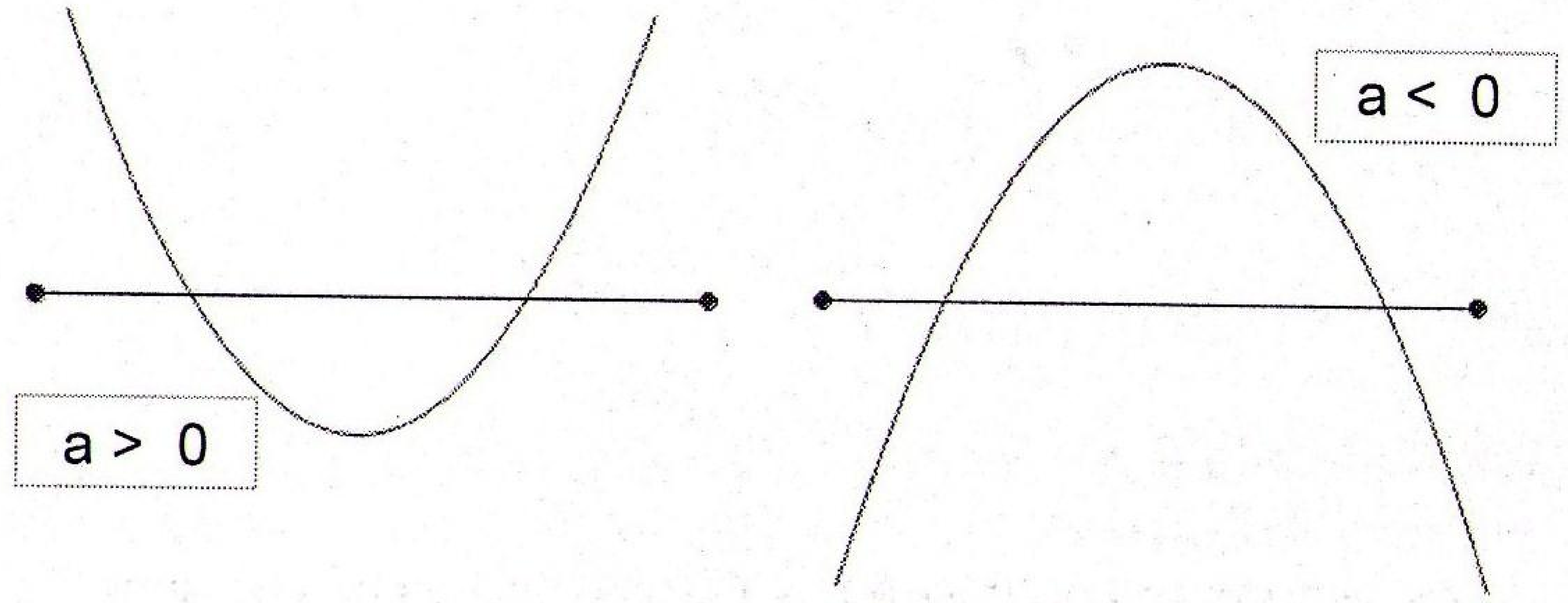


Fig. 6.2.5

Podemos, com o resultado que acabamos de obter generalizar o resultado que obtivemos no Exemplo 6.1.a.

Seja $f(x) = a.x^2 + b.x + c$

Se $a > 0$ (parábola de concavidade para cima) e $\Delta = b^2 - 4.a.c < 0$, então f é sempre positiva.

Se $a < 0$ (parábola de concavidade para baixo) e $\Delta = b^2 - 4.a.c < 0$, então f é sempre negativa

Resultado 6.2.3

Um outro resultado surge a partir da seguinte análise gráfica. "Dado um número real w, como saber se ele está entre ou fora do intervalo das raízes?" Repare a figura a seguir.

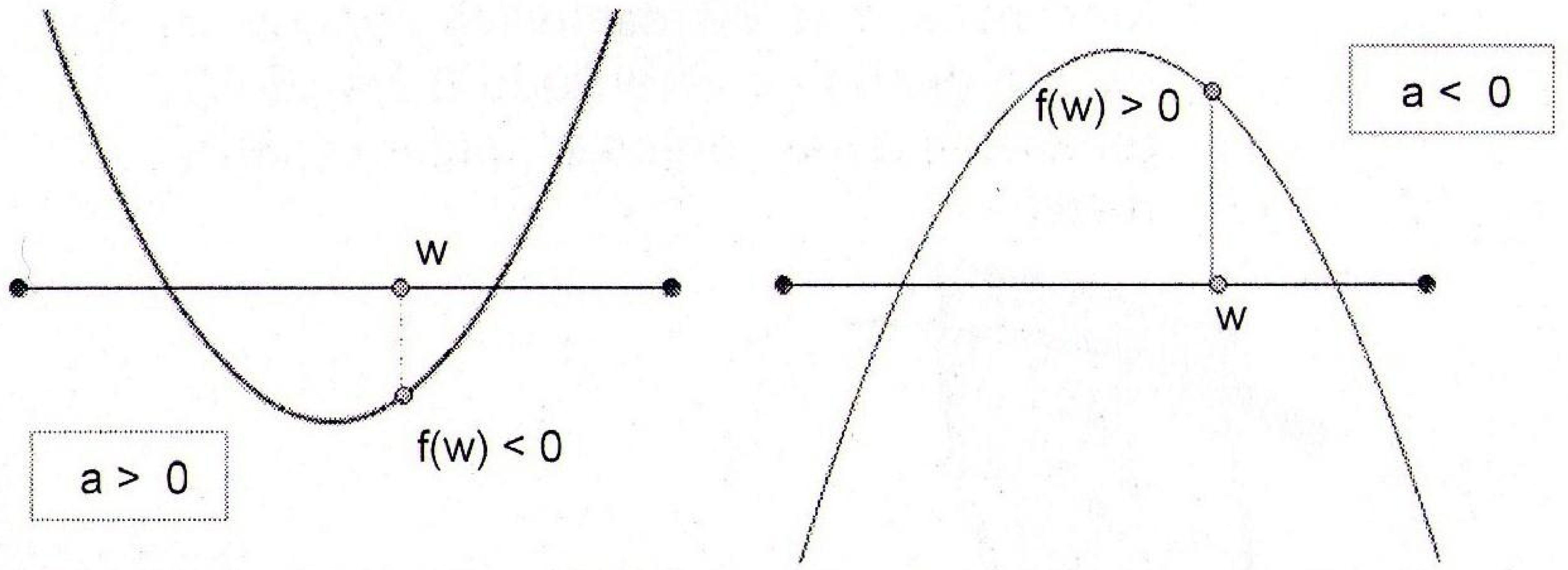


Fig. 6.2.6 - O produto a.f(w) é negativo em ambos os casos acima

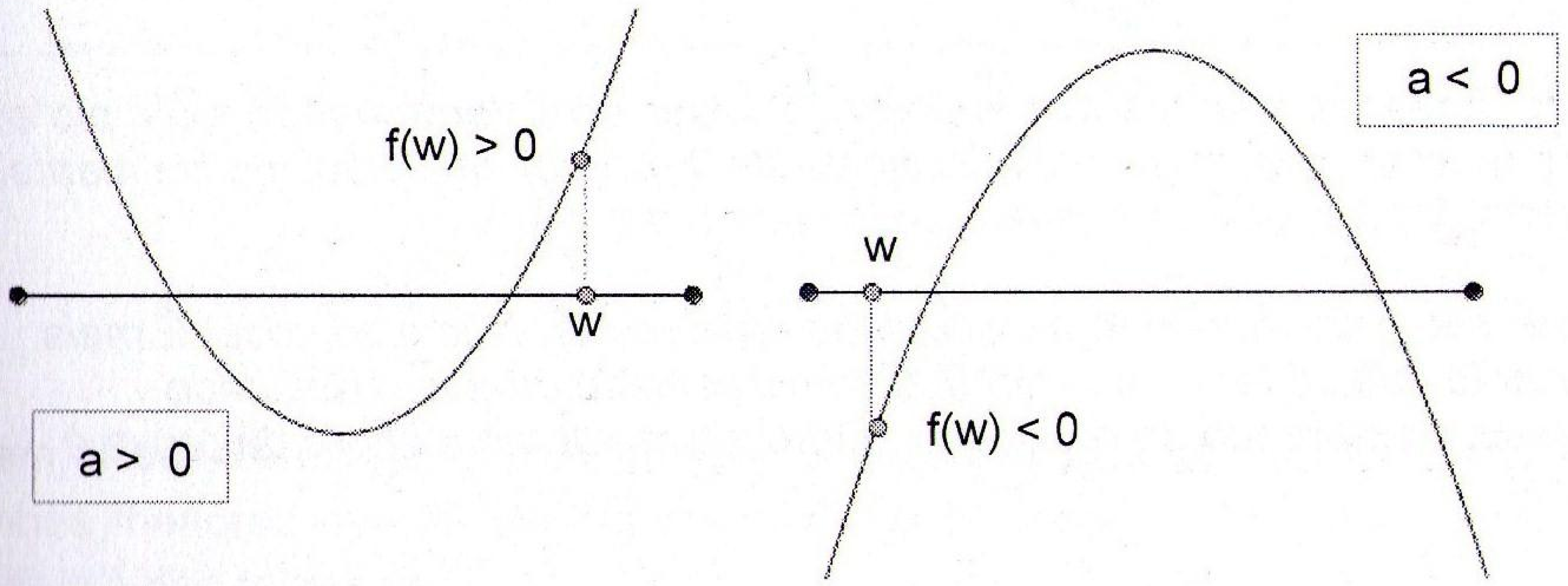


Fig. 6.2.7 - O produto a.f(w) é positivo em ambos os casos acima

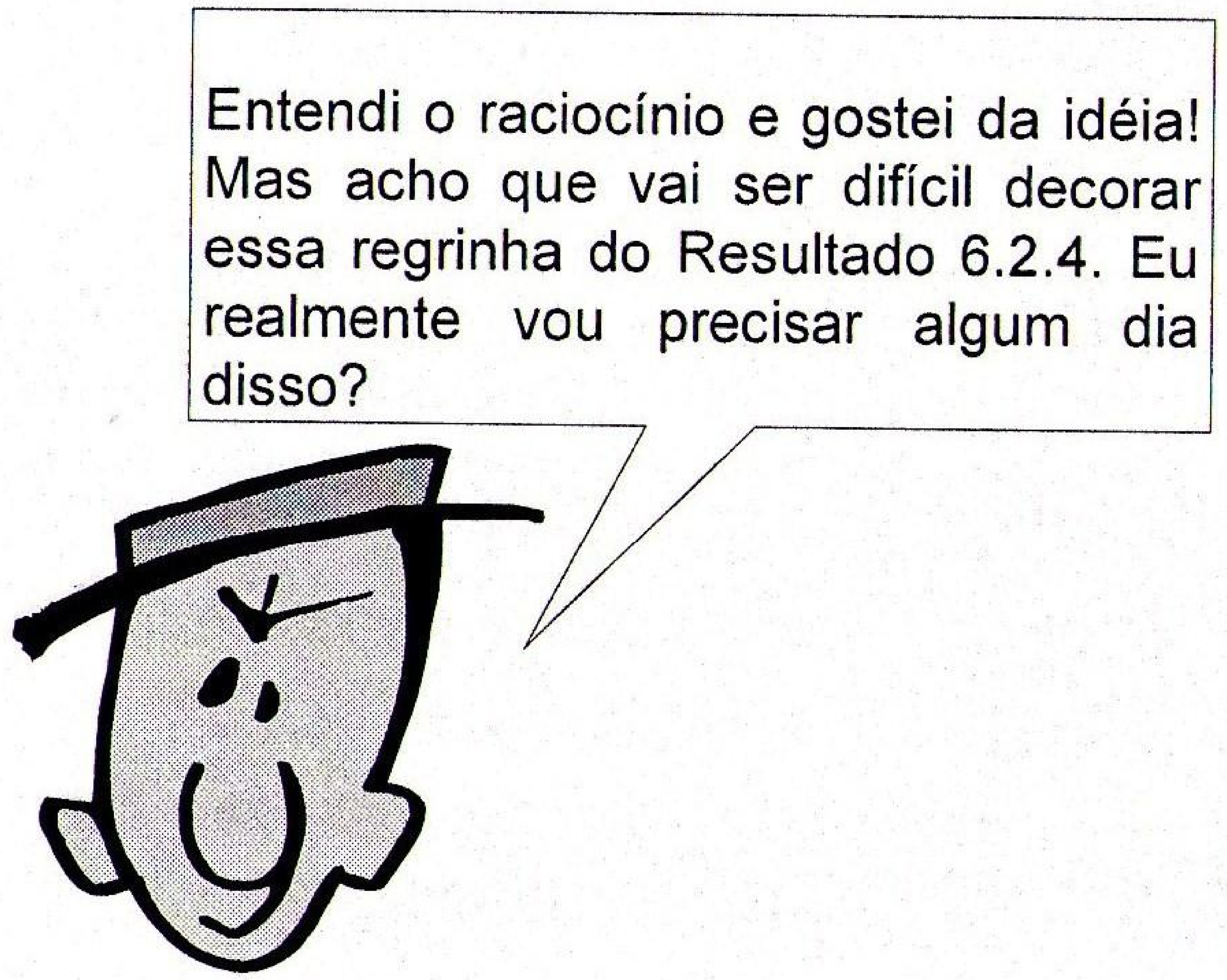
De modo geral, podemos dizer que:

Seja $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ de raízes $x_1 < x_2$, e w um número real.

$a.f(w) < 0 \Leftrightarrow$ o número real w se encontra entre as raízes ($x_1 < w < x_2$).

$a.f(w) > 0 \Leftrightarrow$ o número real w se encontra fora do intervalo das raízes ($w < x_1$ ou $w > x_2$)

Resultado 6.2.4



Autor: *Esses resultados são importante saber sim! Veremos um exemplo a seguir (e alguns outros nos Exercícios de Fixação) que são incrivelmente facilitados com a análise dos resultados como o 6.2.4.*

Lembre-se: Todo mundo tem dificuldade em decorar. Não é só você! É mais importante que se tenha o raciocínio compreendido do que o resultado decorado. Lembrando do raciocínio, deduzir o resultado na hora da prova é moleza!

Exemplo 6.2.b Considere a função do segundo grau abaixo com parâmetro m real. Determine os valores possíveis de m para que a função possua duas raízes reais distintas, ambas menores que 2 ou ambas maiores que 2.

$$f(x) = m^2.x^2 + x + 16.m$$

Solução:

A primeira restrição é que a função deve possuir 2 raízes reais distintas. Para isso, seu determinante deverá ser positivo.

$$\Delta = 1 - 64.m^3 > 0$$

Traçando (*trace como exercício*) o gráfico da função de m, $1 - 64.m^3$, vemos que a mesma é positiva para $m < ¼$ (condição I).

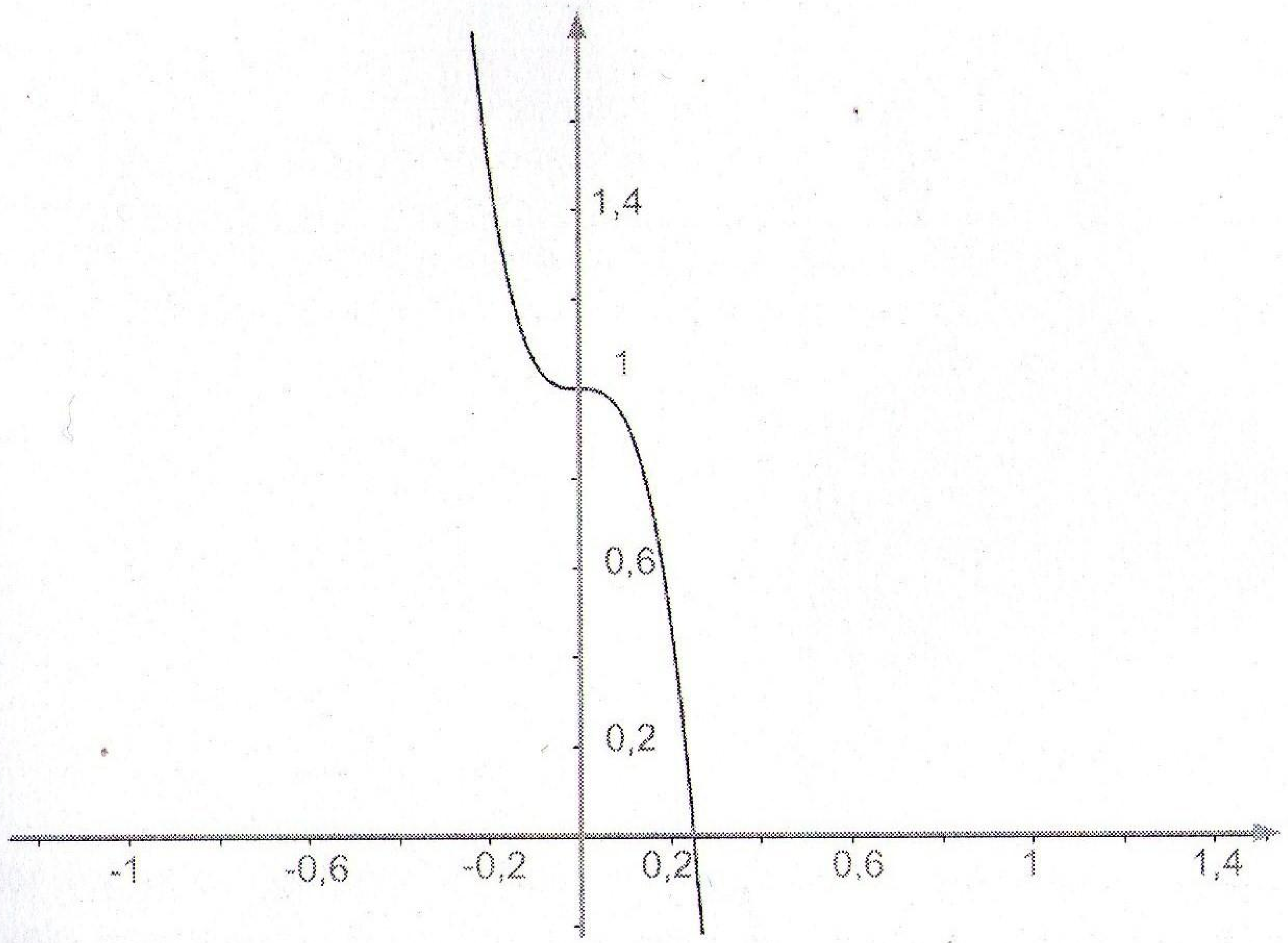


Fig. I

Além disso, o enunciado pede que as raízes sejam ambas maiores que 2 ou ambas menores que 2. Em outras palavras, ele pede que 2 esteja fora do intervalo das raízes de f.

Do resultado 6.2.4, segue a condição para que isso ocorra:

$$m^2.f(2) > 0 \Rightarrow \underbrace{m^2}_{>0}.(4m^2 + 16m + 2) > 0 \Rightarrow 4m^2 + 16m + 2 > 0$$

Traçando o gráfico (*trace como exercício*) da função de m, $4m^2 + 16m + 2$, vemos que a mesma é positiva para:

$$m > \frac{\sqrt{14}}{2} - 2 \quad \text{ou} \quad m < -2 - \frac{\sqrt{14}}{2} \quad \text{(condição II)}$$

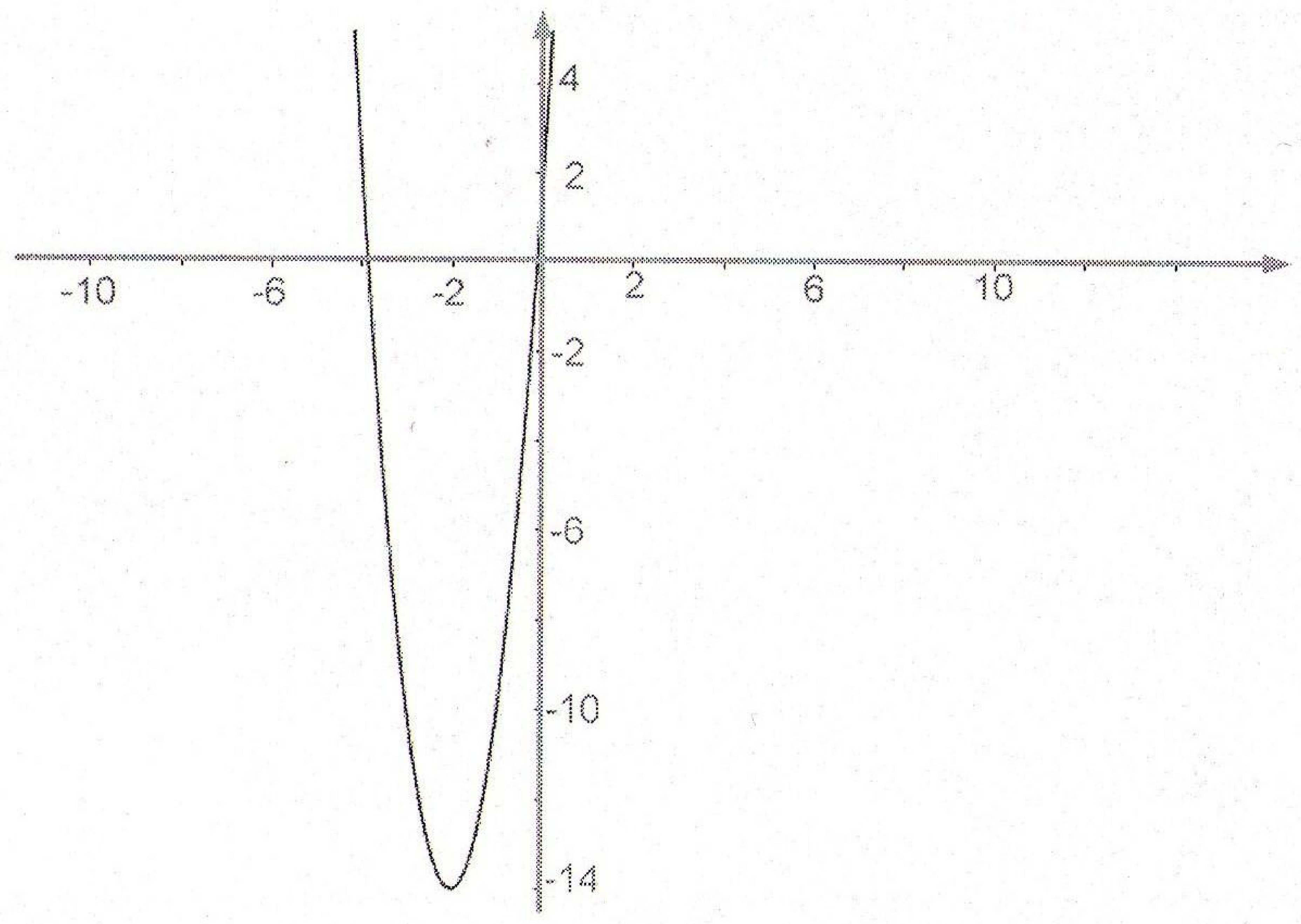


Fig. II

Da interseção entre as condições I e II, segue a resposta:

Resposta: $m \in \left(-\infty, -2 - \frac{\sqrt{14}}{2}\right) \cup \left(-2 + \frac{\sqrt{14}}{2}, \frac{1}{4}\right)$

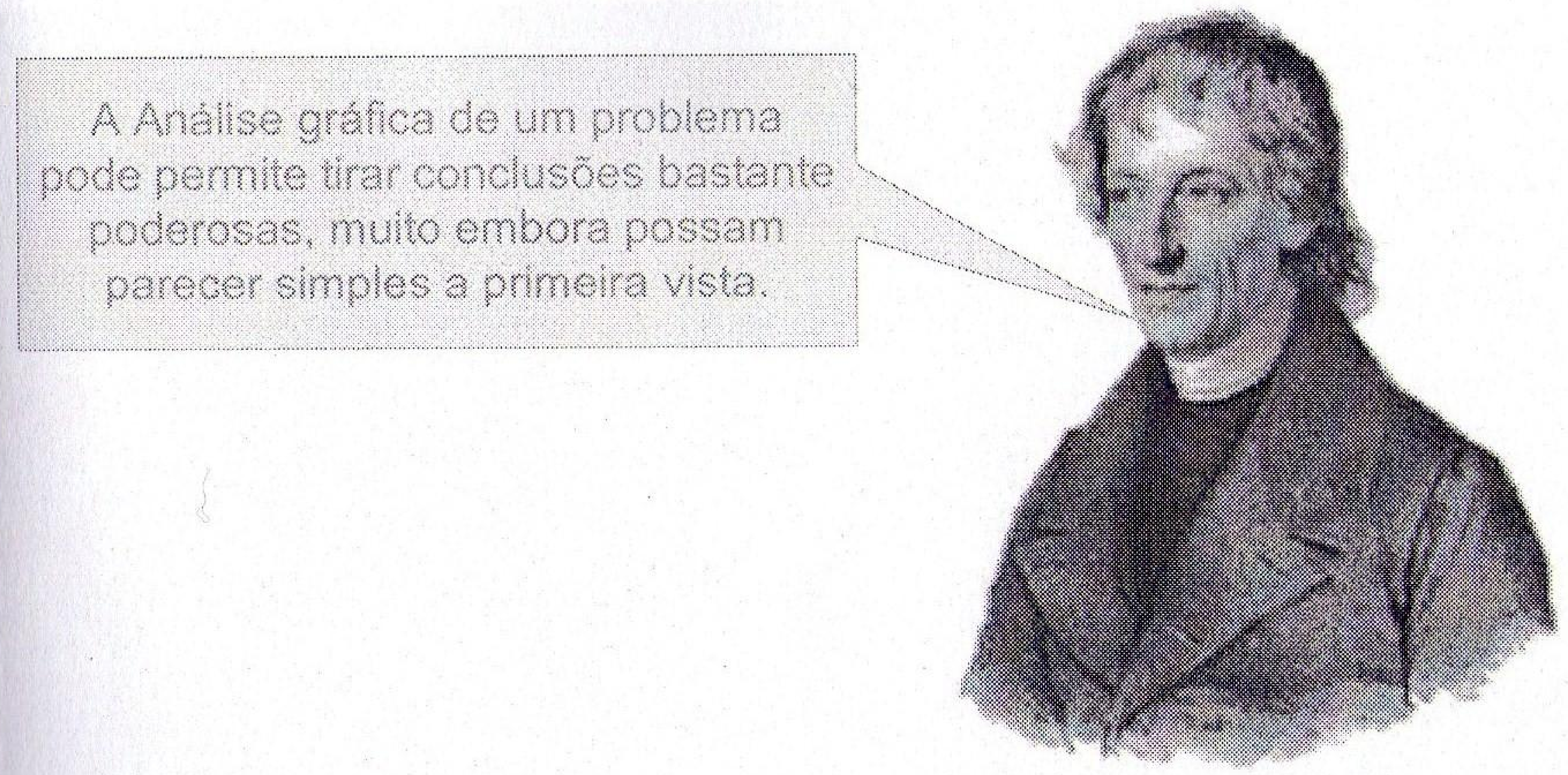
6.3 Teorema de Bolzano

Estudaremos agora um resultado do matemático italiano Bernard Bolzano.

> Sejam a e b (a < b) números reais e, f uma função contínua no intervalo [a,b] tal que f(a) e f(b) têm sinais opostos. Então, existe um real c ∈ [a,b] tal que f(c) = 0 (ou ainda, existe uma raíz real de f entre a e b).

Resultado 6.3.1 Teorema de Bolzano

A demonstração do teorema de Bolzano pode ser feita a partir do Teorema do Valor Intermediário (ver Apêndice), bem como ser feita também, de maneira inteiramente independente. Como nos interessa a interpretação gráfica do teorema, faremos apenas uma verificação intuitiva da validade do resultado.



Bernard Bolzano 1781-1848

As condições do teorema de Bolzano supõem que a função é contínua no intervalo estudado e que f(a) e f(b) têm sinais contrários. Ora, se a função tem sinais contrários em a e em b, e deve ser contínua em [a,b], para atravessar de um lado para o outro da reta Ox, ela teve que cruzá-la em algum ponto!

O teorema de Bolzano pode não parecer, mas é uma ferramenta poderosíssima de busca de raízes de funções contínuas (como é o caso dos polinômios). Muitos métodos computacionais (os chamados métodos numéricos) de determinação de raízes utilizam esse teorema aparentemente 'óbvio'.

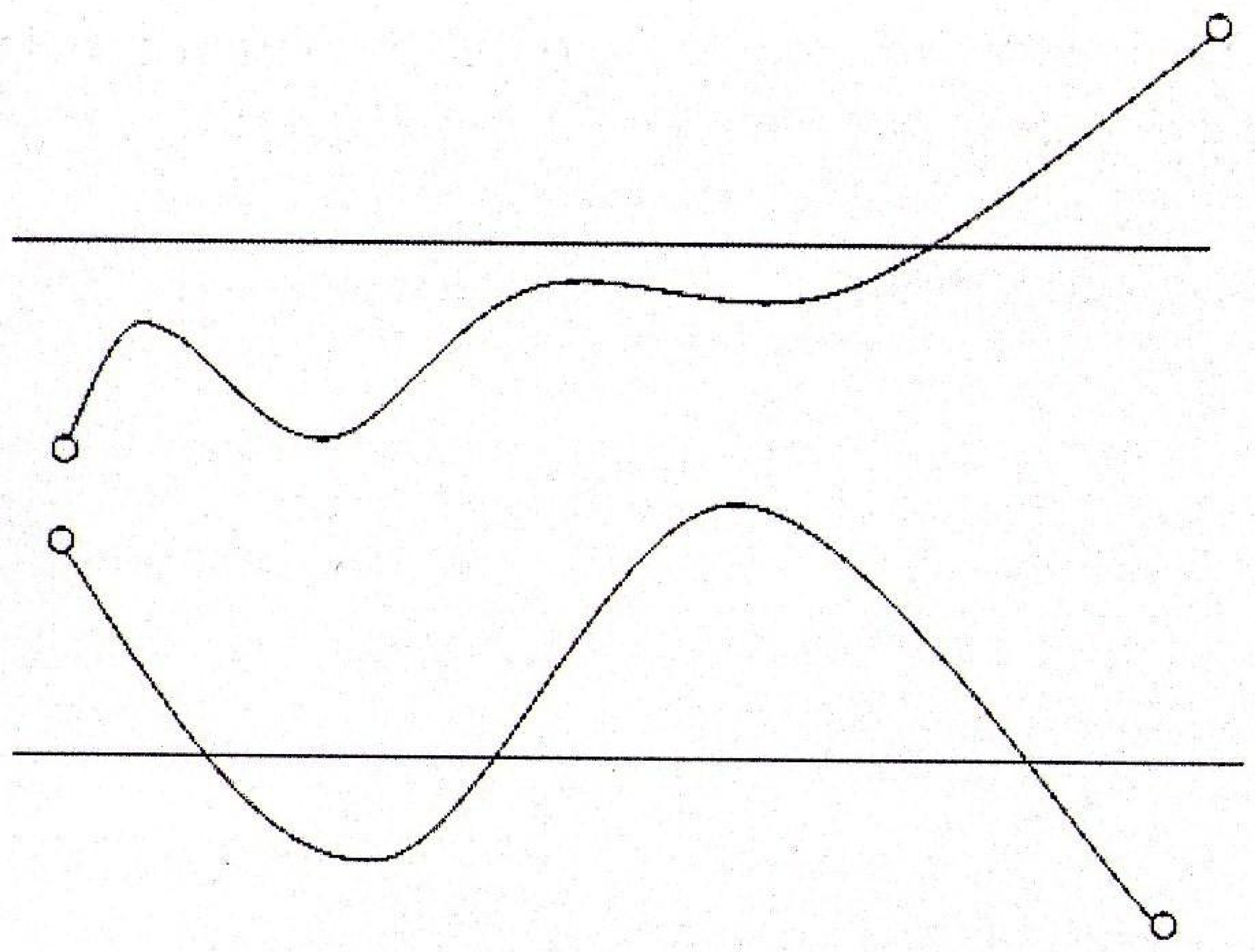


Fig. 6.3.2

Ou seja, se f(a).f(b) < 0, a função cruza um número ímpar de vezes o eixo Ox.

Sejam a e b (a < b) números reais, e f uma função contínua no intervalo [a,b].

- Se f(a).f(b) = 0, a ou b (ou ambos) é raiz de f.

- Se f(a).f(b) > 0, f possui um número par de raízes reais (ou zero raízes reais) em [a,b]

- Se f(a).f(b) < 0, f possui um número ímpar de raízes reais em [a,b].

Resultado 6.3.2 Extensão do Teorema de Bolzano

Exemplo 6.3.a Considere $P(x) = x^3 - 3.x + 1$. Quantas raízes reais existem no intervalo aberto (0,1)?

Solução:
Primeiramente, devemos notar que: P(0) = 1 e P(1) = – 1

De acordo com o Resultado 6.3.2, a Extensão do Teorema de Bolzano, como P(0) e P(–1) possuem sinais opostos, temos um número ímpar de raízes reais em (0,1).

Ora, sabemos que o grau do polinômio é 3, e portanto pelo Teorema Fundamental da Álgebra, esse número ímpar só pode ser 1 ou 3.

Repare agora que, P(3) = 1. Ou seja, P(1) e P(3) têm sinais opostos. Agora do teorema de Bolzano (Resultado 6.3.1) segue que existe pelo menos uma raiz real em (1, 3).

Como (0,1) não está contido em (1,3), a única possibilidade é que exista uma única raíz real em (0,1).

Resposta: há somente uma raiz real em (0,1)

6.4 Exercícios de Fixação

Exercício 6.1 (IME - 1983) Dada a equação, com m real:

$$2.mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0$$

Determine m para que uma raiz seja inferior a 1 e a outra seja superior a 1.

Exercício 6.2 Dados $f(x) = a.x^2 + b.x + c$. Sabendo que x = 1 está entre as raízes e que a > 0, podemos afirmar que:

(a) $a + b + c > 0$ (b) $a + b + c < 0$ (c) $b^2 - 4.a.c < 0$ (d) $a + b - 2.c > 0$

Exercício 6.3 Determine os valores possíveis para m de modo que a equação abaixo tenha duas raízes reais x_1 e x_2 tais que: $-1 < x_1 < 4 < x_2$

$$(m-2).x^2 - 2.m.x + 2.m - 3 = 0$$

Exercício 6.4 (IME – 2000) Considere a, b, c números reais tais que a < b < c. Prove que a equação abaixo possui exatamente duas raízes x_1 e x_2 que satisfazem a condição: $a < x_1 < b < x_2 < c$.

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

Exercício 6.5 Considere o polinômio P(x) abaixo.

$$P(x) = x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1.x + 1$$

Sabe-se que P(x) tem coeficientes inteiros e que P(1) > 0. Sabe-se também que P admite uma raiz real k, bem como uma raiz complexa não real. Portanto, dentre as afirmações abaixo, a falsa é?

i) Se k é racional, então k = –1
ii) Se k pertence a (0,1), pode ser que n = 3
iii) Não existe polinômio q com coeficientes inteiros tal que p = q.(x–1)
iv) O número de raízes no intervalo [0,1] é par
v) Uma das afirmações é falsa

Exercício 6.6 Para que valores de b a equação abaixo admite 3 raízes reais, distintas duas a duas?

$$x^3 - 3.x^2 - 9x + b = 0$$

Exercício 6.7 Determine o número de raízes reais do polinômio:

$$P(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 - 500$$

Exercício 6.8 (ITA – 2001) Com base no gráfico da função polinomial f(x) abaixo, determine qual é o resto da divisão de f(x) por g(x):

$$g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right).(x-1)$$

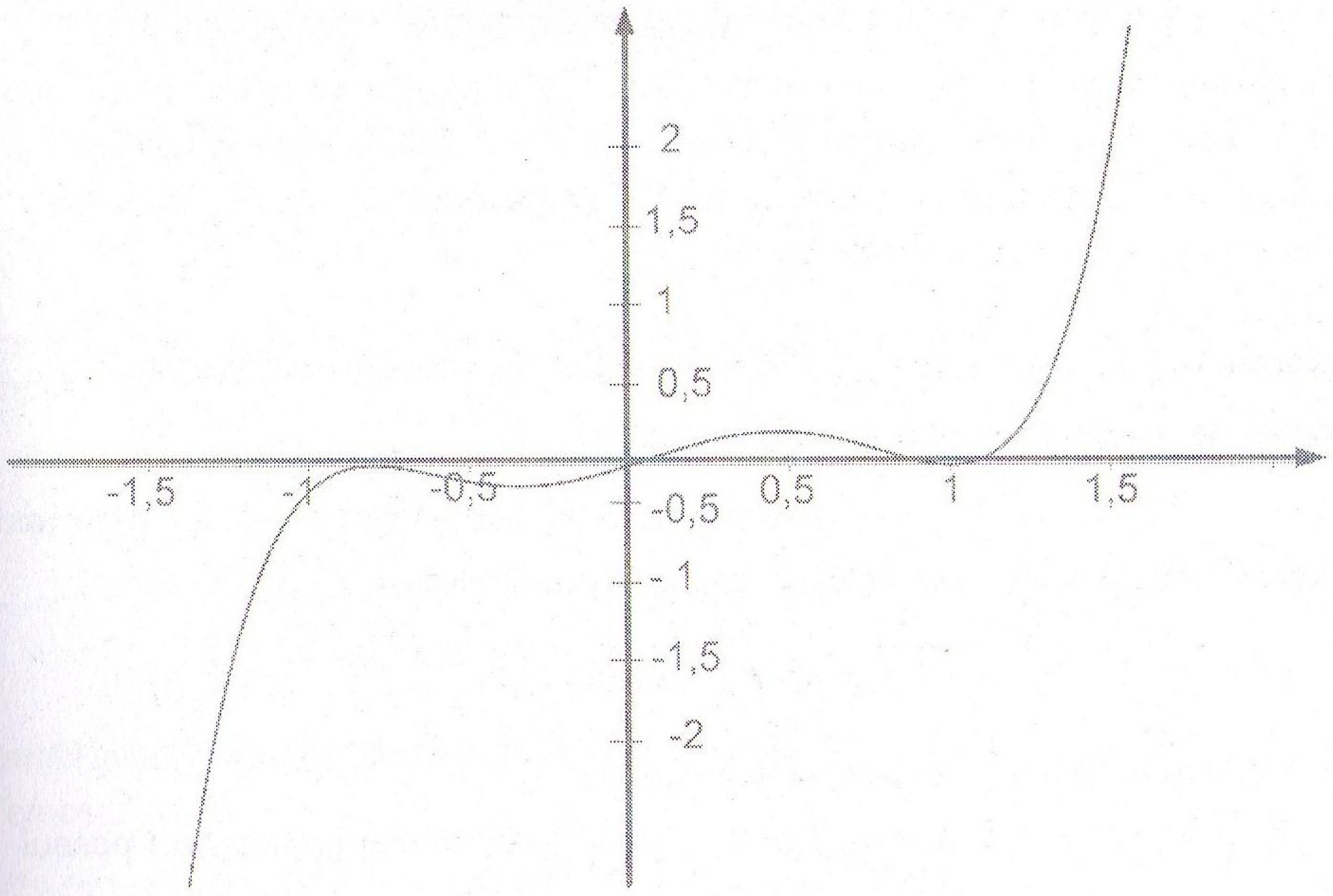


Fig. Ex-6.8

Exercício 6.9 Trace o gráfico da seguinte função polinomial

$$P(x) = x^3 - 4.x + 1$$

Exercício 6.10 Referindo-se à solução gráfica da questão anterior, esboce os gráficos das seguintes funções:

$$M(x) = P(x) + 1 \; ; \; N(x) = 3.P(x) \; ; \; Q(x) = P(x+3) \; ; \; R(x) = P'(x)$$

Exercício 6.11 (ITA – 1991) Seja S o conjunto de todas as raízes da equação $P(x) = 12.x^3 - 16.x^2 - 3.x + 4 = 0$. Podemos afirmar que:

a) $S \subset (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2)$
b) $S \subset (-2,-1) \cup (0,1) \cup (3,4)$
c) $S \subset [0, 4]$
d) $S \subset (-2,-1) \cup (1,2) \cup (3,4)$
e) N.R.A

Exercício 6.12 Considere uma função do segundo grau genérica . O que acontecerá com o gráfico da função se mantivermos os parâmetros a e b constantes e variarmos c nos reais? O que acontecerá se mantivermos os parâmetros a e c constantes e variarmos b? E finalmente, mantendo os outros dois constantes, e variando a? Dê embasamento ao seu comentário com o uso de gráficos ilustrativos.

Exercício 6.13 Demonstre que toda equação do segundo grau $a.x^2 + b.x + c$ possui um eixo de simetria em $x = -b/2a$.

Exercício 6.14 (ITA – 2002) Dada a função quadrática:

$$f(x) = x^2.\ln\frac{2}{3} + x.\ln 6 - \frac{1}{4}.\ln\frac{3}{2}$$

a) A equação f(x) = 0 não possui raízes reais.

b) A equação f(x) = 0 possui 2 raízes reais distintas e o gráfico de f possui concavidade para cima.

c) A equação f(x) = 0 possui 2 raízes reais iguais e o gráfico de f possui concavidade para baixo.

d) O valor máximo de f é $(\ln 2.\ln 3)/(\ln 3 - \ln 2)$

e) O valor máximo de f é $2.(\ln 2.\ln 3)/(\ln 3 - \ln 2)$

Exercício 6.15 (ITA – 2005) ✗ Determine todos os valores reais de a que façam com que a equação abaixo tenha exatamente três soluções distintas:

$$(x-1)^2 = |x-a|$$

Capítulo 7
Resoluções Comentadas

Soluções – Capítulo 1

Exercício 1.1
Lembrando dos resultados notáveis da seção 1.2

$$z = i.\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = i.(i)^n = i^{n+1}$$

Sabendo que as potências reais de i são as de expoente par, n deve ser ímpar.

Exercício 1.2 Vamos simplificar a expressão dada:

$$z = \frac{i-1}{tg\theta + i} = \frac{i-1}{tg\theta + i}.\left(\frac{tg\theta - i}{tg\theta - i}\right) = \frac{(i-1)(tg\theta - i)}{tg^2\theta + 1}$$

Lembrando, da trigonometria, que: $\sec^2\theta = tg^2\theta + 1 \quad \forall\theta \in \mathbb{R}$
Temos:

$$z = \frac{i-1}{tg\theta + i} = \frac{(i-1)(tg\theta - i)}{tg^2\theta + 1} = \frac{(i.tg\theta + 1 - tg\theta + i)}{\sec^2\theta}$$
$$= \frac{(1-tg\theta) + i.(tg\theta + 1)}{\sec^2\theta}$$

Para que o complexo esteja sobre a bissetriz do primeiro quadrante, sua parte real deve ser igual a sua parte imaginária e ambos devem ser positivos!

$$\begin{cases} \dfrac{(1-tg\theta)}{\sec^2\theta} = \dfrac{(1+tg\theta)}{\sec^2\theta} \\ \dfrac{(1-tg\theta)}{\sec^2\theta} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow tg\theta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\theta = 0}$$

Exercício 1.3 Basta mostrar que: $x + y.i = \dfrac{1+x+y.i}{1+x-y.i}$ sempre que: $|z| = 1$.

Isso é equivalente a mostrar que: $(x+y.i)(1+x-y.i) = 1+x+y.i$

Exercício 1.7 Seja $z = r.\text{cis}\theta$:

$$z^5 = -\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow (r.\text{cis}\theta)^5 = -\overline{(r.\text{cis}\theta)} \Leftrightarrow r^5.\text{cis}(5\theta) = -r.\text{cis}(-\theta)$$

$$\Leftrightarrow r^5.\text{cis}(5\theta) = (\text{cis}\pi).r.\text{cis}(-\theta)$$

$$\Leftrightarrow r^5.\text{cis}(5\theta) = r.\text{cis}(\pi - \theta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^5 = r,\ r \geq 0 \\ 5\theta = (\pi - \theta) + 2.k.\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \quad \text{ou} \quad r = 0 \\ \theta = \dfrac{\pi + 2.k.\pi}{6},\ k = 0,1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$$\left\{0,\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right), \text{cis}\left(\frac{3\pi}{6}\right), \text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right), \text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right), \text{cis}\left(\frac{9\pi}{6}\right), \text{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right\}$$

Exercício 1.8 Sendo z de módulo unitário, $z = \text{cis}\theta$:

$$\frac{z^n}{1+z^{2n}} = \frac{\text{cis}(n\theta)}{1+\text{cis}(2n\theta)}$$

Usando a Fórmula 1.3.1:

$$\frac{z^n}{1+z^{2n}} = \frac{\text{cis}(n\theta)}{1+\text{cis}(2n\theta)} = \frac{\cancel{\text{cis}(n\theta)}}{2.\cos(n\theta).\cancel{\text{cis}(n\theta)}} = \frac{1}{2.\cos(n\theta)} \in \mathbb{R}$$

Exercício 1.9 Lembremos as duas propriedades (Formulas 1.2.2 e 1.5.5):

$$\begin{cases} z + \bar{z} = 2.\text{Re}(z) \in \mathbb{R} \\ z.\bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Da Lei de De Moivre:

$$\left(z^5 + \bar{z}^5\right) = \left(|z|^5.\text{cis}(5.\arg z) + |z|^5.\text{cis}(-\arg 5z)\right) \overset{1.2.2}{=} 2|z|^5.\cos(5.\arg z) \in \mathbb{R}$$

Segue então que o produtório analisado é um produto de números reais, que é real.

Exercício 1.10

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{27}{2}.\left(\sqrt{3} + i\right) = 27.\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \\ a_4 = \dfrac{\left(i.\sqrt{3} - 1\right)}{2} = \text{cis}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

É fácil notar que se os módulos estão em PG e os argumentos estão em PA, então os termos da seqüência são complexos em P.G pois:

$$a_n = |a_n|.\text{cis}(\arg a_n) = |a_1|.|q|^{n-1}.\text{cis}(\arg a_1 + (n-1).r)$$

$$= |a_1|.\text{cis}(\arg a_1)\left(|q|.\text{cis}(r)\right)^{n-1}$$

$$= a_1.q^{n-1}$$

Da lei de formação da PG: $a_4 = a_1 q^3$

$$\Rightarrow q^3 = \frac{\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{27\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{27}$$

Da radiciação (Formula 1.5.7): $q = \dfrac{\text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}{3}$

De onde segue que, como $|q| = 1/3 < 1$:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \quad \therefore \quad S_\infty = \frac{27.\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1 - \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)},\quad k = 0,1,2$$

OBS: *A soma pode ter 3 diferentes resultados satisfazendo as condições do problema.*

Exercício 1.11 Seja z um elemento qualquer de A. Isto é:

$$z = x + y.i,\ x, y \in \mathbb{R},\quad x^2 + y^2 = 1.$$

Vamos determinar a imagem desse complexo pela função g.

$$g(x+yi) = (4+3i)(x+yi)+5-i = x'+y'.i \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4x+4y.i+3x.i-3y)+5-i = x'+y'i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4x-3y+5)+i.(4y+3x-1) = x'+y'i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y+5 = x' \\ 4y+3x-1 = y' \end{cases}$$

Resolvendo pra x e y:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3y'+4x'-17}{25} \\ y = \dfrac{4y'-3x'+19}{25} \end{cases}$$

Como $x^2+y^2=1$,

$$\left(\frac{3y'+4x'-17}{25}\right)^2+\left(\frac{4y'-3x'+19}{25}\right)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((3y'+4x')^2-34.(3y'+4x')+17^2\right)+\left((4y'-3x')^2+38.(4y'-3x')+19^2\right) = 25^2$$

$$\Leftrightarrow 25x'^2+25y'^2+50y'-250x'+650 = 25^2$$

$$\Leftrightarrow x'^2+y'^2+2y'-10x'+\overbrace{26}^{25+1} = 25$$

$$\Leftrightarrow (x'^2-10x'+\underline{25})+(y'^2+2y'+\underline{1}) = 25$$

$$\Leftrightarrow (x'-5)^2+(y'+1)^2 = 25$$

A equação acima representa uma circunferência de raio 5 e centrada no ponto (5,-1). Para maior referência, consulte um livro de Geometria Analítica.

Exercício 1.12

$$(z+1)^5+z^5 = 0 \Rightarrow (z+1)^5 = -z^5 \quad (\div z^5)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z+1}{z}\right)^5 = -1$$

Da Formula1.5.7:

$$\Rightarrow \left(\frac{z+1}{z}\right) = \sqrt[5]{-1} = \text{cis}\overbrace{\left(\frac{2k\pi+\pi}{5}\right)}^{\theta}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{z} = \text{cis}\theta \Rightarrow \frac{1}{z} = \text{cis}\theta-1 \qquad \text{onde } \theta = \frac{2k\pi+\pi}{5}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{\text{cis}\theta-1} = \frac{1}{(\cos\theta-1)+i.\text{sen}\theta} = \frac{1}{(\cos\theta-1)+i.\text{sen}\theta}.\frac{(\cos\theta-1)-i.\text{sen}\theta}{(\cos\theta-1)-i.\text{sen}\theta}$$

$$\Rightarrow z = \frac{(\cos\theta-1)-i.\text{sen}\theta}{(\cos\theta-1)^2+(\text{sen}\theta)^2} = \frac{(\cos\theta-1)-i.\text{sen}\theta}{\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta-2.\cos\theta+1}$$

$$\Rightarrow z = \frac{(\cos\theta-1)-i.\text{sen}\theta}{2-2.\cos\theta} = \frac{(\cos\theta-1)}{2(1-\cos\theta)}-\frac{i.\text{sen}\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{2}-\frac{i.\text{sen}\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

$$\Rightarrow \text{Re}(z) = -\frac{1}{2}$$

Logo z pertence a uma reta paralela ao eixo imaginário no eixo complexo (uma vez que sua parte real é constante).

Exercício 1.13 Devemos nos atentar ao fato de que o enunciado pediu "uma" solução, deixando em aberto a possibilidade de haver mais de uma.

Verifiquemos isso agora:

$$\text{PA: } b-r,\ b,\ b+r \qquad z = \text{cis}\theta$$

$$\frac{1}{z^a}+\frac{1}{z^b}+\frac{1}{z^c} = \frac{1}{z^9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\text{cis}(a\theta)}+\frac{1}{\text{cis}(b\theta)}+\frac{1}{\text{cis}(c\theta)} = \frac{1}{\text{cis}(9\theta)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\text{cis}(a\theta))^{-1}+(\text{cis}(b\theta))^{-1}+(\text{cis}(c\theta))^{-1} = (\text{cis}(9\theta))^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{cis}(-a\theta)+\text{cis}(-b\theta)+\text{cis}(-c\theta) = \text{cis}(-9\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{cis}(-(b-r)\theta)+\text{cis}(-b\theta)+\text{cis}(-(b+r)\theta) = \text{cis}(-9\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{cis}(-b\theta+r\theta)+\text{cis}(-b\theta)+\text{cis}(-b\theta-r\theta) = \text{cis}(-9\theta) \Leftrightarrow$$

Formula 1.5.1:

$$\Leftrightarrow \operatorname{cis}(-b\theta).\operatorname{cis}(r\theta)+\operatorname{cis}(-b\theta)+\frac{\operatorname{cis}(-b\theta)}{\operatorname{cis}(r\theta)}=\operatorname{cis}(-9\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cis}(-b\theta)\left[\operatorname{cis}(r\theta)+1+\frac{1}{\operatorname{cis}(r\theta)}\right]=\operatorname{cis}(-9\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\operatorname{cis}(r\theta)+1+\frac{1}{\operatorname{cis}(r\theta)}\right]=\operatorname{cis}((b-9)\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{(\operatorname{cis}(r\theta))^2+\operatorname{cis}(r\theta)+1}{\operatorname{cis}(r\theta)}\right]=\operatorname{cis}((b-9)\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{(\operatorname{cis}(2r\theta)+1)+\operatorname{cis}(r\theta)}{\operatorname{cis}(r\theta)}\right]=\operatorname{cis}((b-9)\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{2.\cos(r\theta)\cancel{\operatorname{cis}(r\theta)}+\cancel{\operatorname{cis}(r\theta)}}{\cancel{\operatorname{cis}(r\theta)}}\right]=\operatorname{cis}((b-9)\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2.\cos(r\theta)+1=\cos((b-9)\theta)+i.\operatorname{sen}((b-9)\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2.\cos(r\theta)+1=\cos((b-9)\theta) \\ 0=\operatorname{sen}((b-9)\theta) \end{cases}$$

Note que, de fato, existem mais de uma solução para essa condição. Para facilitar, vamos tomar $r = 1$, $\theta = \pi/2$.

$$\frac{1}{z^a}+\frac{1}{z^b}+\frac{1}{z^c}=\frac{1}{z^9} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+1=\cos\left((b-9)\frac{\pi}{2}\right) \\ 0=\operatorname{sen}\left((b-9)\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left((b-9)\frac{\pi}{2}\right)=1 \\ \operatorname{sen}\left((b-9)\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow (b-9)\frac{\pi}{2}=2k.\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow (b-9)=4k \quad k\in\mathbb{Z}$$

Uma solução válida, por exemplo é: $b = 9$, $a = 8$, $c = 10$, $z=\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}=i$

Exercício 1.14

$$x^{-1}+x=2.\cos\theta \Rightarrow \frac{1+x^2}{x}=2.\cos\theta$$

$$\Rightarrow x^2-(2\cos\theta)x+1=0 \Rightarrow x=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{4(\cos^2\theta-1)}}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\cos\theta\pm 2.\sqrt{-\operatorname{sen}^2\theta}}{2}=\cos\theta\pm i.\operatorname{sen}\theta=\operatorname{cis}(\pm\theta)$$

Com isso:

$$x^{-2008}+x^{2008}=(\operatorname{cis}(\pm\theta))^{-2008}+(\operatorname{cis}(\pm\theta))^{2008}$$
$$=(\operatorname{cis}(\mp 2008.\theta))+(\operatorname{cis}(\pm 2008.\theta))$$
$$=2.\cos(2008.\theta)$$

$$\boxed{x^{-2008}+x^{2008}=2.\cos(2008.\theta)}$$

Exercício 1.15 Determinemos primeiro as raízes do polinômio divisor.

$$x^2+x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm i.\sqrt{3}}{2}=\operatorname{cis}\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$P(x)=(x+1)^m+x^m+1$$

$$\Rightarrow P\left(\operatorname{cis}\left(\pm 2\pi/3\right)\right)=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^m+\left(\operatorname{cis}\left(\pm 2\pi/3\right)\right)^m+1$$
$$=\left(\operatorname{cis}\left(\pm \pi/3\right)\right)^m+\left(\operatorname{cis}\left(\pm 2\pi/3\right)\right)^m+1$$
$$=1+\left(\operatorname{cis}\left(\pm m\pi/3\right)\right)+\left(\operatorname{cis}\left(\pm 2m\pi/3\right)\right)$$
$$\overset{\text{Soma de P.G.}}{=}\frac{\left(\operatorname{cis}\left(\pm m\pi/3\right)\right)^3-1}{\left(\operatorname{cis}\left(\pm m\pi/3\right)\right)-1}=\frac{(-1)^m-1}{\left(\operatorname{cis}\left(\pm m\pi/3\right)\right)-1}$$

Para m par, excetuando os múltiplos de 6, teremos que $P(w)=0$ onde w é uma raiz qualquer de $x^2+x+1=0$. Portanto o conjunto solução é:

m par, exceto múltiplos de 6

Exercício 1.16 Seja $z=a+bi$

$$z^3+z^2-|z|^2+2z=0 \overset{\text{Formula 1.5.5}}{\Leftrightarrow} z^3+z^2-z.\bar{z}+2.z=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ \text{ou} \\ z^2+z-\bar{z}+2=0 \end{cases}$$

Se $z \neq 0$,

$$(a^2-b^2+2.a.b.i)+(a+b.i)-(a-.bi)+2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab+2b=0 \\ a^2-b^2+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \text{ ou } a=-1 \\ a^2-b^2+2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=0,\ a^2+2=0 \ (\text{não convém pois 'a' é real}) \\ \text{ou} \\ a=-1,\ b=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$z_1=-1+i\sqrt{3}$; $z_2=-1-i.\sqrt{3}$; $z_3=0$

$z_1+z_2+z_3=-2$

Exercício 1.17 O número complexo z possui argumento igual a 45° quando sua parte imaginária for igual sua parte real. Vejamos a condição para que isso ocorra:

$$\frac{1-\cos a}{\operatorname{sen} a.\cos a}=\frac{1-2\cos a+2.\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} 2a} \Leftrightarrow \frac{1-\cos a}{\operatorname{sen} a.\cos a}=\frac{1-2\cos a+2.\operatorname{sen} a}{2.\operatorname{sen} a.\cos a}$$

$$\Leftrightarrow 2-2\cos a=1-2\cos a+2\operatorname{sen} a \Leftrightarrow \operatorname{sen} a=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{a=\frac{\pi}{6}}$$

Exercício 1.18 $z=|z|.\operatorname{cis}\theta$

$$\frac{|z|-i.z}{|z|+i.z}=\frac{|z|-i.|z|\operatorname{cis}\theta}{|z|+i.|z|\operatorname{cis}\theta}=\frac{1-i.\operatorname{cis}\theta}{1+i.\operatorname{cis}\theta}=\frac{1-\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}.\operatorname{cis}\theta}{1+\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}.\operatorname{cis}\theta}=\frac{1-\operatorname{cis}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\operatorname{cis}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$$

Usando as Fórmulas 1.3.1 e 1.3.2:

$$=\frac{-2.i.\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right).\cancel{\operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}{2.\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right).\cancel{\operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}=-i.\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

Logo a expressão calculada é um imaginário puro!

Exercício 1.19

Nas passagens a seguir usaremos as fórmulas deduzidas nas seções 1.2 e 1.5. Tente identificar qual propriedade foi usada em cada passagem!

I. $$\overline{w}=\overline{\left(\frac{2iz^2+5\bar{z}-i}{1+3.\bar{z}^2+2iz+3|z|^2+2|z|}\right)}=\frac{\overline{(2iz^2+5\bar{z}-i)}}{\overline{\left(1+3.\bar{z}^2+2iz+3|z|^2+2|z|\right)}}$$

$$=\frac{2\bar{i}\bar{z}^2+5z-\bar{i}}{\left(1+3.z^2+2\bar{i}\bar{z}+3|\bar{z}|^2+2|z|\right)}=\frac{-2i\bar{z}^2+5z+i}{1+3.z^2-2i\bar{z}+3|\bar{z}|^2+2|z|}$$

(VERDADEIRA)

II. $$|w|=\left|\frac{2iz+3i+3}{(1+2i)z}\right|=\frac{|2iz+3i+3|}{|(1+2i)z|}=$$

$$=\frac{|2iz+3i+3|}{|1+2i||z|}=\frac{|2iz+3i+3|}{|z|\sqrt{5}}\leq\frac{|2iz|+3|i+1|}{|z|\sqrt{5}}=\frac{2|z|+3\sqrt{2}}{|z|\sqrt{5}}$$

(VERDADEIRA)

III- $$\arg w=\arg(1+i)+\arg z^2-\arg\left(4\sqrt{3}+4i\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}+2.\arg z-\frac{\pi}{6}=2\arg z+\frac{\pi}{12}$$

(VERDADEIRA)

Resposta: Opção (A)

OBS: *Esse exercício, a principio, parece ser difícil, mas não é nada mais que aplicar as simples propriedades de números complexos vistas durante o capítulo.*

Exercício 1.20

$$1+z+z^2+z^3+z^4=0 \overset{\text{Soma de P.G.}}{\Rightarrow} \frac{z^5-1}{z-1}=0 \Rightarrow z^5=1,\ z\neq 1$$

$$\Rightarrow z=\text{cis}\left(\frac{2k\pi}{5}\right),\ k=1,2,3,4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z\notin\mathbb{R} \\ |z|=1,\ k=1,2,3,4 \\ \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{r}{3}\right|^k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k<\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{1/3}{1-1/3}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Portanto, a única afirmativa verdadeira é a III.

Resposta: Opção (D)

Exercício 1.21 Seja $z=x+y.i \quad x,y\in\mathbb{R}$

$$(z+i)^2+|\overline{z}+i|^2=6 \Leftrightarrow z^2+2.z.i-1+(\overline{z}+i).\overline{(\overline{z}+i)}=6$$

$$\Leftrightarrow z^2+2.z.i-1+(\overline{z}+i).(z-i)=6$$

$$\Leftrightarrow z^2+2.z.i-1+(z.\overline{z}-i.\overline{z}+i.z+1)=6$$

$$\Leftrightarrow z^2+3.z.i-i.\overline{z}+|z|^2=6$$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2+2.x.y.i+3.x.i-3.y-x.i-y+x^2+y^2=6$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2.x.y.i+2.x.i-4y=6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2y=3\\ xy+x=0\end{cases} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases}x^2+2=3\\ y=-1\end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Logo: $z^n=(1-i)^n \quad \Rightarrow z^2=(1-i)^2=-2.i$

O menor n natural tal que já z^n é imaginário puro é 2, uma vez que:

$$\boxed{n=2}$$

Exercício 1.22 Sendo w uma raiz n-ésima da unidade diferente de 1, temos que: $w^n=1$

$$\begin{aligned} S &= 1+2w+3w^2+4w^3+\ldots+n.w^{n-1} \\ S.w &= \quad w+2w^2+3w^3+\ldots+(n-1).w^{n-1}+n.w^n \\ \hline S.(1-w) &= 1+w+w^2+w^3+\ldots+w^{n-1}+n.w^n \\ &= \frac{w^n-1}{w-1}-n.w^n \end{aligned}$$

$$\therefore S=\frac{\overset{=0}{\cancel{w^n-1}}}{-(w-1)^2}-\frac{n.w^n}{1-w}=\frac{n.1}{w-1}$$

Exercício 1.23. Seja z uma raiz de um polinômio real de grau n.

$$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\ldots+a_1z^1+a_0=0$$

$$\Rightarrow \overline{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\ldots+a_1z^1+a_0}=\overline{0}$$

$$\overset{\text{Form. 1.2.4}}{\Rightarrow} \overline{a_nz^n}+\overline{a_{n-1}z^{n-1}}+\overline{a_{n-2}z^{n-2}}+\ldots+\overline{a_1z^1}+\overline{a_0}=0$$

$$\overset{\text{Form.1.2.5}}{\Rightarrow} \overline{a_n}\,\overline{z}^n+\overline{a_{n-1}}\,\overline{z}^{n-1}+\overline{a_{n-2}}\,\overline{z}^{n-2}+\ldots+\overline{a_1}\,\overline{z}^1+\overline{a_0}=0$$

$$\Rightarrow a_n\overline{z}^n+a_{n-1}\overline{z}^{n-1}+a_{n-2}\overline{z}^{n-2}+\ldots+a_1\overline{z}^1+a_0=0$$

$$\Rightarrow P(\overline{z})=0$$

Exercício 1.24 Usando a representação trigonométrica:

$$z(t)=2+4.e^{it}=2+4.\cos t+i.4\text{sen}t=x+y.i \Leftrightarrow \begin{cases}2+4.\cos t=x\\ 4\text{sen}t=y\end{cases}$$

Eliminando o parâmetro t:

$$\begin{cases}\cos t=\dfrac{x-2}{4}\\ \text{sen}t=\dfrac{y}{4}\end{cases} ;\quad \text{sen}^2t+\cos^2t=1 \Rightarrow \left(\frac{x-2}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1$$

Ou seja, a imagem de z(t) é uma circunferência de centro no complexo 2 (de afixo (2,0)) e raio 4. Note que como t varia em $[0,2\pi]$, a função representa uma volta completa sobre esse L.G.

$$|z(t)| = |2 + 4.\cos t + i.\text{sen}t| = \sqrt{(2+4.\cos t)^2 + (4\text{sen}t)^2}$$
$$= \sqrt{4 + 16.\cos t + 16.(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)}$$
$$= \sqrt{20 + 16.\cos t}$$

Ou seja, o máximo do módulo de t ocorre quando $\cos t = 1$

$$\boxed{|z(t)|_{max} = |z(0)| = |z(2\pi)| = 6}$$

Exercício 1.25 Generalizando a exponenciação para números complexos poderíamos ter:

$$i^i = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^i = \left(e^{\frac{i^2\pi}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right) = \sqrt{e^{-\pi}} = \frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}} \cong 0,21$$

Exercício 1.26 $z = \text{cis}\theta$

$$\Rightarrow i.z = -\text{sen}\theta + i.\cos\theta$$

$$\Rightarrow e^{i.z} = e^{-\text{sen}\theta + i.\cos\theta} = \underbrace{e^{-\text{sen}\theta}.e^{i.\cos\theta}}_{|z|.e^{i.\arg(z)}} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} |e^{iz}| = e^{-\text{sen}\theta} \\ \arg(e^{iz}) = \cos\theta \end{cases}}$$

Exercício 1.27 $w = \left(2.\text{cis}\frac{\pi}{20}\right)^5 = 32.\text{cis}\frac{\pi}{4} = 16\sqrt{2} + i.16\sqrt{2}$

$$z^4 - 2.z^2 + \frac{w - 16i\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow z^4 - 2.z^2 + 2 = 0 \Rightarrow z^2 = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$$

$$\Rightarrow z^2 = \begin{cases} \sqrt{2}.\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sqrt{2}.\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = \begin{cases} 2^{1/4}.\text{cis}\left(\frac{\pi}{8} + k.\pi\right) \\ 2^{1/4}.\text{cis}\left(-\frac{\pi}{8} + k.\pi\right) \end{cases} \quad k = 0,1$$

$$\boxed{z = 2^{1/4}.\text{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right),\ 2^{1/4}.\text{cis}\left(\frac{9\pi}{8}\right),\ 2^{1/4}.\text{cis}\left(-\frac{\pi}{8}\right),\ 2^{1/4}.\text{cis}\left(\frac{7\pi}{8}\right)}$$

Exercício 1.28

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+\text{cis}\theta}{1-\text{cis}\theta} \overset{\text{Form.1.3.1/1.3.2}}{=} \frac{2.\cos(\theta/2)\text{cis}(\theta/2)}{-2.i.\text{sen}(\theta/2).\text{cis}(\theta/2)}$$
$$= -\frac{\cos(\theta/2)}{i.\text{sen}(\theta/2)} = i.\text{ctg}\left(\frac{\arg(z)}{2}\right)$$

Exercício 1.29

Usamos as propriedades 1.5.5 e 1.2.2 a seguir:

$$\frac{z}{|z|^2 + z^2} = \frac{\not{z}}{\not{z}.\bar{z} + z.\not{z}} = \frac{1}{\bar{z} + z} = \frac{1}{\text{Re}(z)} \in \mathbb{R}$$

Exercício 1.30

$$|f(z)| = |z| \text{ e } |f(z) - f(1)| = |z - 1|$$

$$(f(z) - f(1)).\overline{(f(z) - f(1))} \overset{\text{Form.1.5.5}}{=} |f(z) - f(1)|^2 = |z - 1|^2$$

$$\Rightarrow f(z).\overline{f(z)} - f(z).\overline{f(1)} - f(1).\overline{f(z)} + f(1).\overline{f(1)} = (z-1).\overline{(z-1)}$$
$$\Rightarrow |f(z)|^2 - \left(f(z).\overline{f(1)} + f(1).\overline{f(z)}\right) + |f(1)|^2 = (z-1).(\bar{z}-1)$$

$$\Rightarrow |z|^2 - \left(f(z).\overline{f(1)} + f(1).\overline{f(z)}\right) + |1|^2 = z.\bar{z} - (\bar{z}+z)+1$$

$$\Rightarrow \cancel{|z|^2} - \left(f(z).\overline{f(1)} + f(1).\overline{f(z)}\right) + \cancel{1} = \cancel{|z|^2} - (\bar{z}+z)+\cancel{1}$$

$$\Rightarrow f(z).\overline{f(1)} + f(1).\overline{f(z)} = \bar{z}+z \overset{\text{Form. 1.2.2}}{=} 2\text{Re}(z)$$

Exercício 1.31

$$\left(\frac{z}{|z|}\right)^n = (\text{cis}\alpha)^n = \text{cis}(n\alpha) \quad \therefore \left(\frac{z}{|z|}\right)^n = \text{i.sen}(n\alpha) \Leftrightarrow \cos(n\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow n\alpha = k.\pi + \frac{\pi}{2} \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2n\alpha - \pi = k.(2\pi) \quad , k \in \mathbb{Z}$$

Exercício 1.32

$$w^{2k} + w^k + 1 =$$

$$= \begin{cases} \text{Se } k \not\equiv 0 \pmod 3: & \dfrac{(w^k)^3 - 1}{w^k - 1} = \dfrac{(w^3)^k - 1}{w^k - 1} = \dfrac{(1)^k - 1}{w^k - 1} = 0 \\ \text{Se } k \equiv 0 \pmod 3: & w^{2k} + w^k + 1 = w^{6t} + w^{3t} + 1 = \\ & = (w^3)^{2t} + (w^3)^t + 1 = 1+1+1 = 3 \end{cases}$$

Ou seja:

Para k múltiplo de 3: $w^{2k} + w^k + 1 = 3$
Para k não múltiplo de 3: $w^{2k} + w^k + 1 = 0$

Exercício 1.33

$$\begin{cases} w^2 - z^2 = 4 + 12.i \\ \bar{z} - \bar{w} = 2 + 4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(z-w)(z+w) = 4 + 12.i \\ \overline{z - w} = 2 + 4i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(z-w)(z+w) = 4 + 12.i \\ z - w = 2 - 4i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z + w = \frac{4+12.i}{4i-2} = \frac{2+6.i}{2i-1}.\frac{-1-2i}{-1-2i} = \frac{10-10i}{5} = 2 - 2.i$$

$z + w = 2 - 2.i$

Exercício 1.34 É importante notar $(2+i)^n = \overline{(2-i)^n}$ pra todo n natural. Portanto os números complexos só seriam iguais se ambos fossem coincidentes sobre o eixo real (ou seja, se ambos forem reais puros). Basta então provar que isso nunca acontece. Atacaremos o problema, tentando mostrar $\text{Im}\left[(2-i)^n\right] \neq 0$ pra todo n.

$$(2-i)^n = A_n + i.B_n \quad , \quad A_n, B_n \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (2-i)^{n+1} = (A_n + i.B_n).(2-i) = \underbrace{(2A_n + B_n)}_{A_{n+1}} + i.\underbrace{(2B_n - A_n)}_{B_{n+1}}$$

$$\therefore \begin{cases} A_{n+1} = 2A_n + B_n \\ B_{n+1} = 2B_n - A_n \end{cases} \Leftrightarrow B_{n+2} = 2B_{n+1} - A_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow B_{n+2} = 2(2B_n - A_n) - (2A_n + B_n)$$

$$\Leftrightarrow B_{n+2} = 3B_n - 4.A_n = 3B_n - 4.(-B_{n+1} + 2B_n)$$

$$\Leftrightarrow B_{n+2} - 4B_{n+1} + 5B_n = 0$$

Note que chegamos a uma recorrência com equação característica com raízes complexas. Não perca fé! Será que a partir dessa recorrência podemos provar que B_n nunca será 0? Vamos listar alguns valores de B_n usando a recorrência achada:

$$B_1 = -1 \; ; \; B_2 = -4; \; B_3 = -11; \; B_4 = -24; \; B_5 = -41 \ldots$$

Esses valores têm algo em comum! Todos têm sempre resto -1 ou -4 na divisão por 10. Devido ao caráter cíclico que a recorrência dá a esses números na congruência módulo 10, B_n nunca poderá ser 0, uma vez que 0 não possui resto -1 ou -4 na divisão por 10.

Soluções – Capítulo 2

Exercício 2.1 Atendendo ao enunciado teremos 2 soluções possíveis. Dado um segmento no plano, podemos formar 2 triângulos eqüiláteros com lado nesse segmento (o 3º vértice poderá estar em qualquer um dos lados do segmento).

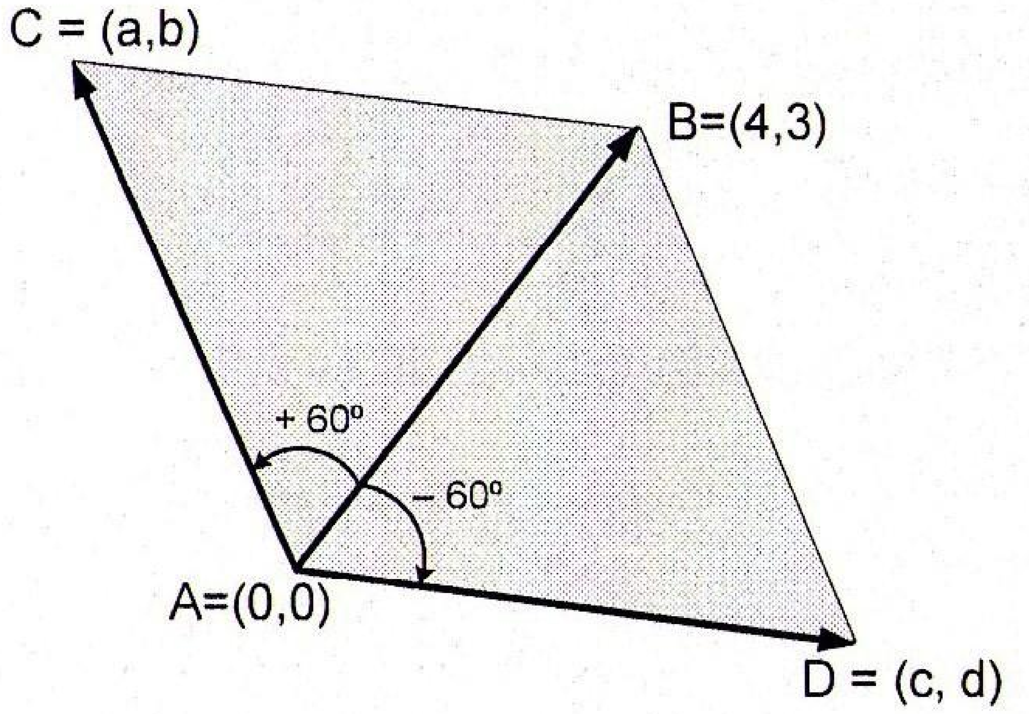


Fig. Ex-2.1

Vértice C:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad C - A = (4+3.i)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow C = \underbrace{A}_{(0,0)} + \left(\frac{4-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3+4\sqrt{3}}{2}.i\right)$$

$$\boxed{\therefore\ C = \left(\frac{4-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Vértice D:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad D - A = (4+3.i)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow D = \underbrace{A}_{(0,0)} + \left(\frac{4+3\sqrt{3}}{2} + \frac{3-4\sqrt{3}}{2}.i\right)$$

$$\boxed{\therefore\ D = \left(\frac{4+3\sqrt{3}}{2}, \frac{3-4\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Exercício 2.2 Novamente teremos duas opções de rotação, e portanto duas soluções para o mesmo problema.

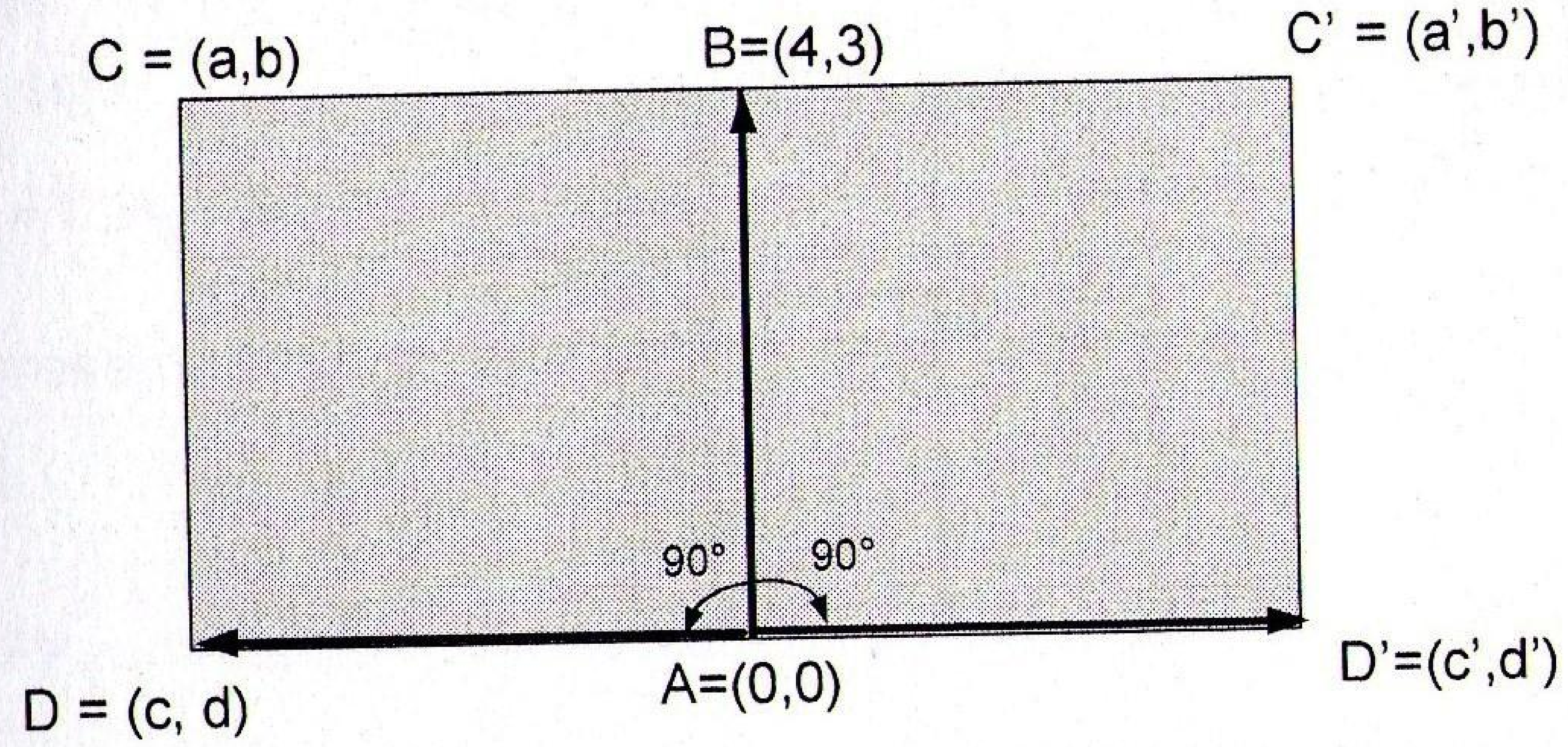


Fig. Ex-2.2

Quadrado da esquerda:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.i \quad \Rightarrow \quad D - A = i.(4+3i)$$

$$\Rightarrow \quad D = \underbrace{A}_{(0,0)} + (4i - 3)$$

$$\therefore \boxed{D = (-3, 4)}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \quad \Rightarrow \quad D - A = C - B$$

$$\Rightarrow (-3,4) - (0,0) = C - (4,3)$$

$$\therefore \boxed{C = (1,7)}$$

Quadrado da direita:

$$\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AB}.(-i) \quad \Rightarrow \quad D' - A = -i.(4+3i)$$

$$\Rightarrow D' = \underbrace{A}_{(0,0)} + (-4i + 3)$$

$$\therefore \boxed{D' = (3, -4)}$$

$$\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{BC'} \quad \Rightarrow \quad D' - A = C' - B$$

$$\Rightarrow (3,-4) - (0,0) = C - (4,3)$$

$$\therefore \boxed{C' = (7, -1)}$$

Exercício 2.3 Para que os vetores sejam paralelos, eles devem formar um ângulo múltiplo de 180 graus (Veja resultado 2.2.3). Um complexo de argumento igual a k.π é sempre um número real, logo:

$$\arg\left(\frac{z-w}{u-v}\right) = k.\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z-w}{u-v}\right) \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z-w}{u-v}\right) = \overline{\left(\frac{z-w}{u-v}\right)}$$

Usando Formula1.2.2

$$\therefore \quad \frac{z-w}{u-v} = \frac{\bar{z}-\bar{w}}{\bar{u}-\bar{v}}$$

Exercício 2.4 Para que os vetores sejam ortogonais, eles devem formar um ângulo de 90 graus. O raciocínio é análogo à questão anterior.

$$\arg\left(\frac{z-w}{u-v}\right)=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{z-w}{u-v}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z-w}{u-v}\right)=-\overline{\left(\frac{z-w}{u-v}\right)}$$

$$\boxed{\therefore \frac{z-w}{u-v}+\frac{\bar{z}-\bar{w}}{\bar{u}-\bar{v}}=0}$$

Exercício 2.5 Conforme foi visto na seção 2.1 (consulte a figura 2.1.5), escrever as coordenadas do ponto no sistema rotacionado no sentido trigonométrico equivale a escrever as coordenadas do vetor rotacionado no sentido anti-trigonométrico no sistema original.
Assim:

$$\overline{OP'}=\overline{OP}.\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow P'=P.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}.i\right)$$

$$\Rightarrow P'=(1+3.i).\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}.i\right)=\left(\frac{\sqrt{3}+3}{2}+\frac{3\sqrt{3}-1}{2}.i\right)$$

$$\boxed{\therefore P'=\left(\frac{\sqrt{3}+3}{2},\frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)}$$

OBS: *O mesmo resultado seria obtido caso utilizássemos a expressão geral para rotação de eixos demonstrada na seção 2.1*

Exercício 2.6 Vamos testar a condição de colinearidade de w, u e v (Resultado 2.2.3):

$$\frac{w-u}{v-u}=\frac{1+5.i-3-11.i}{-2-4i-3-11.i}=\frac{-2-6.i}{-5-15.i}$$

$$=\frac{2+6.i}{5+15i}=\frac{2}{5}.\left(\frac{1+3.i}{1+3i}\right)=\frac{2}{5}\in\mathbb{R}$$

Logo: (A) u, v, w são colineares.

Exercício 2.7
Vamos considerar a circunferência unitária representada no plano complexo e os vértices $A_1, A_2, \ldots A_n$ como sendo, portanto, as raízes n-ésimas da unidade. Ou seja:

$$A_1=1\,;A_2=w;\ A_3=w^2\,;\ldots;A_n=w^n \quad e \quad 1+w+w^2+\ldots+w^n=0$$

Seja P representado por um ponto z qualquer da circunferência (i.e. $z\bar{z}=|z|^2=1$),

$$PA_1=|1-z|\,;PA_2=|w-z|;\ PA_3=|w^2-z|\,;\ldots;PA_n=|w^n-z|$$

Temos:

$$\begin{cases} PA_1^2=(1-z)\overline{(1-z)}=1-(z+\bar{z})+1=2-(z+\bar{z}) \\ PA_2^2=(w-z)\overline{(w-z)}=w.\bar{w}-w.\bar{z}-z.\bar{w}+z.\bar{z}= \\ \qquad =1-(w.\bar{z}+z.\bar{w})+1=2-(w.\bar{z}+z.\bar{w}) \\ \ldots \\ PA_n^2=(w^n-z)\overline{(w^n-z)}=w^n.\bar{w}^n-w^n.\bar{z}-z.\bar{w}^n+z.\bar{z}= \\ \qquad =1-(w^n.\bar{z}+z.\bar{w}^n)+1=2-(w^n.\bar{z}+z.\bar{w}^n) \end{cases}$$

Calculando a soma $PA_1^2+PA_2^2+\ldots+PA_n^2$

$$PA_1^2+PA_2^2+\ldots+PA_n^2=(2-(z+\bar{z}))+(2-(\bar{w}.z+w\bar{z}))+\ldots+(2-(\bar{w}^n.z+w^n\bar{z}))$$

$$=2.n-\left[(z+\bar{z})+(\bar{w}.z+w\bar{z})+\ldots+(\bar{w}^n.z+w^n\bar{z})\right]$$

$$=2.n-\left[z.(1+\bar{w}+\bar{w}^2+\ldots+\bar{w}^n)+\bar{z}.(1+w+w^2+\ldots+w^n)\right]$$

$$=2.n-\left[z.\overline{(1+w+w^2+\ldots+w^n)}+\bar{z}.(1+w+w^2+\ldots+w^n)\right]$$

$$=2.n-\left[z.\overline{(0)}+\bar{z}.(0)\right]$$

$$=2.n$$

Então, concluímos que a soma analisada é constante e vale 2n.

Exercício 2.8 Novamente, vamos imaginar $A_1, A_2, \ldots A_n$ como vértices do polígono regular formado pelas n-ésimas raízes da unidade. Dessa forma:

$$A_1 = 1; A_2 = w; A_3 = w^2; \ldots; A_n = w^n$$

Sendo w uma raiz n-ésima da unidade e z um complexo qualquer, vimos na teoria que (*Fórmula 1.6.2*):

$$(z-w).(z-w^2)\ldots(z-w^n) = 1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}$$

Ou seja, para z = 1:

$$(1-w).(1-w^2).(1-w^3)\ldots.(1-w^n) = 1+1+\ldots+1 = n$$

$$\Rightarrow \left|(1-w).(1-w^2).(1-w^3)\ldots.(1-w^n)\right| = n$$

$$\Rightarrow |(1-w)|.|(1-w^2)|.|(1-w^3)|\ldots.|(1-w^n)| = n$$

$$\Rightarrow (\overline{A_1A_2}).(\overline{A_1A_3}).(\overline{A_1A_4})\ldots.(\overline{A_1A_n}) = n$$

Exercício 2.9 Seja z o complexo representante de P no plano complexo, e $A_1, A_2, \ldots A_n$ as raízes n-esimas de r, representando a situação geométrica do problema.

Com isso: $A_1 = r \in \mathbb{R}$, $OP = z \in \mathbb{R}$

Calculando o produtório: $(PA_1).(PA_2).(PA_3)\ldots.(PA_n)$

$$(PA_1).(PA_2).(PA_3)\ldots.(PA_n) =$$

$$= |r-z|.\left|r.cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)-z\right|.\left|r.cis\left(\frac{4\pi}{n}\right)-z\right|\ldots.\left|r.cis\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)-z\right|$$

$$= |r-z|.|w-z|.|w^2-z|\ldots.|w^n-z|$$

$$= \left|(z-r).(z-r.w).(z-r.w^2)\ldots(z-r.w^n)\right|$$

Considere o polinômio: $P(z) = z^n - r^n$ que tem raízes:

$$P(z) = z^n - r^n = 0 \Leftrightarrow z^n = r^n \Leftrightarrow z = r.cis\left(\frac{2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,\ldots,n-1$$

Fatorando: $z^n - r^n = (z-r).(z-r.w).(z-r.w^2)\ldots(z-r.w^n)$

E, com isso, lembrando que $z^n, r^n \in \mathbb{R}$ uma vez que $z, r \in \mathbb{R}$:

$$(PA_1).(PA_2).(PA_3)\ldots.(PA_n) = |z^n - r^n| = OP^n - r^n$$

Exercício 2.10 Supondo por absurdo que o ângulo oposto ao lado de comprimento 4 é racional, isto é, é do tipo p/q com p e q inteiros primos entre si. Pra todo n natural diferente de 1, temos:

$$(2+i)^n \neq (2-i)^n \Rightarrow \frac{(2+i)^n}{(2-i)^n} \neq 1 \Rightarrow \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^n \neq 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n \neq 1 \Rightarrow (\cos\alpha + i.\text{sen}\alpha)^n \neq 1$$

$$\Rightarrow (\cos(n\alpha) + i.\text{sen}(n\alpha)) \neq 1 + 0.i$$

$$\Rightarrow n\alpha \neq 360°.k \quad \Rightarrow n\frac{p}{q} \neq 360°.k$$

O que é um absurdo, pois como n é um natural qualquer, e k um inteiro qualquer, tomando $n = 360.q$ e $k = p$, temos que $n\alpha = 360°.k$. Ou seja, o ângulo α é irracional. Mostrar que o outro ângulo agudo do triângulo é irracional é análogo.

Exercício 2.11 Seja w uma raiz cúbica da unidade diferente de 1. Como ABF, ACF e BCD são triângulos eqüiláteros (pela condição que estudamos na teoria no Resultado 2.2.1):

$$D + w.C + w^2.B = 0; \quad C + w.E + w^2.A = 0; \quad B + w.A + w^2.F = 0$$

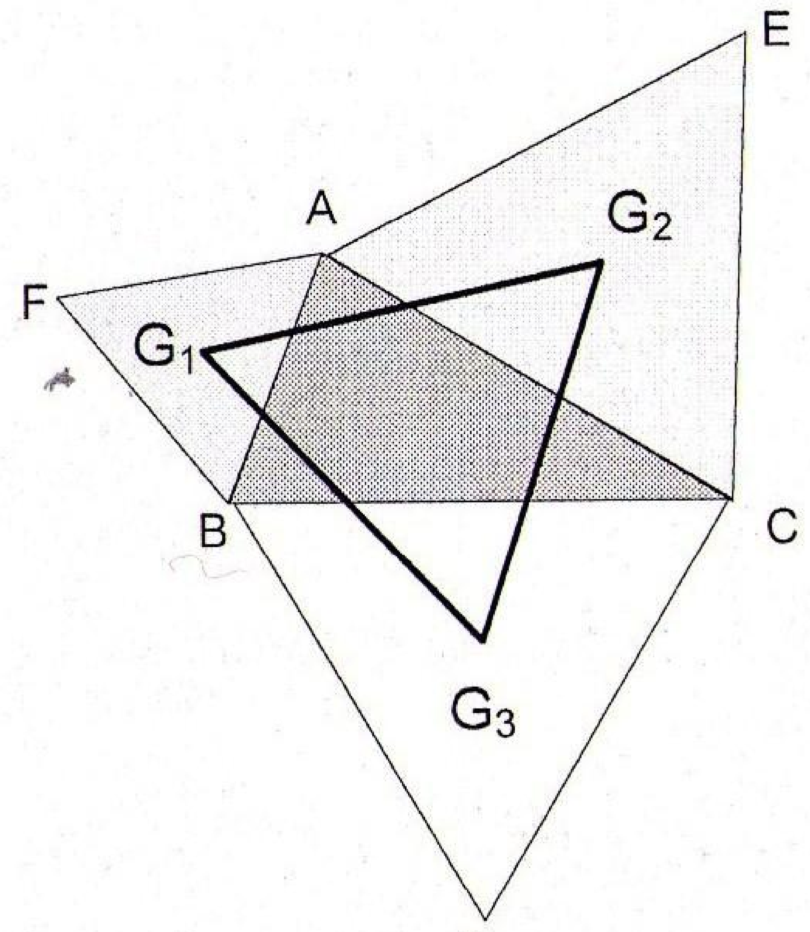


Fig. Ex-2.11

a geometria analítica, sabemos como expressar os baricentros em função dos vértices dos triângulos:

$$G_1 = \frac{B+C+D}{3} \;;\; G_2 = \frac{A+E+C}{3};\; G_3 = \frac{A+F+B}{3}$$

Testando a condição dos baricentros formarem um triângulo eqüilátero (Resultado 2.2.1):

$$G_1 + wG_2 + w^2G_3 = \frac{(B+C+D)}{3} + \frac{(A+E+C).w}{3} + \frac{w^2(A+F+B)}{3}$$
$$= \frac{1}{3}(D + w.C + w^2.B) + \frac{1}{3}(C + w.E + w^2.A) + \frac{1}{3}(B + w.A + w^2.F)$$
$$= \frac{1}{3}.0 + \frac{1}{3}.0 + \frac{1}{3}.0 = 0$$

Portanto o triângulo formado pelos baricentros é eqüilátero.

Exercício 2.12 Do exercício 2.8:

$$(\overline{AB}).(\overline{AC}).(\overline{AD}).....(\overline{AP}).(\overline{AQ}) = n$$
$$\Rightarrow (\overline{AC}).(\overline{AD}).....(\overline{AP}) = \frac{n}{(\overline{AB}).(\overline{AQ})} = \frac{n}{|w-1|.|w^{n-1}-1|}$$
$$= \frac{n}{|w^n - w - w^{n-1} + 1|} = \frac{n}{|(1-w)+(1-w^{n-1})|}$$
$$= \frac{n}{\left|2 - \text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \text{cis}\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right|} \qquad (\text{Lembre}:\ w^n = 1)$$

Lembrando das identidades de ângulos suplementares:

$$\alpha + \beta = 2\pi \Rightarrow \begin{cases} \cos(\alpha) = \cos(\beta) \\ \text{sen}(\alpha) = -\text{sen}(\beta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\overline{AC}).(\overline{AD}).....(\overline{AP}) =$$
$$= \frac{n}{\left|2 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \cancel{i.\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)} - \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) - \cancel{i.\text{sen}\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)}\right|}$$
$$= \frac{n}{\left|2 - 2.\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right|} = \frac{n}{2\left|1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right|} = \frac{n}{2\left|2.\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right|} = \frac{n}{4}.\csc^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\boxed{(AC).(AD).....(AP) = \frac{n}{4}\csc^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Exercício 2.13 Note que o numerador de w é real sempre (Fórmula 1.2.2):

$$z + \overline{z} + 2 = 2.\text{Re}(z) + 2$$

Basta então que o radicando no denominador seja maior que zero para que w seja real. Ou seja, a condição para que w seja real é:

$$|z-1| + |z+1| > 3$$

Seguindo a teoria vista na Seção 2.3 (figuras 2.3.4 e 2.3.5), o conjunto representa a parte **exterior** à elipse de focos nos complexos 1 e −1 e comprimento do eixo maior igual a 3 (no plano complexo). Representação geométrica:

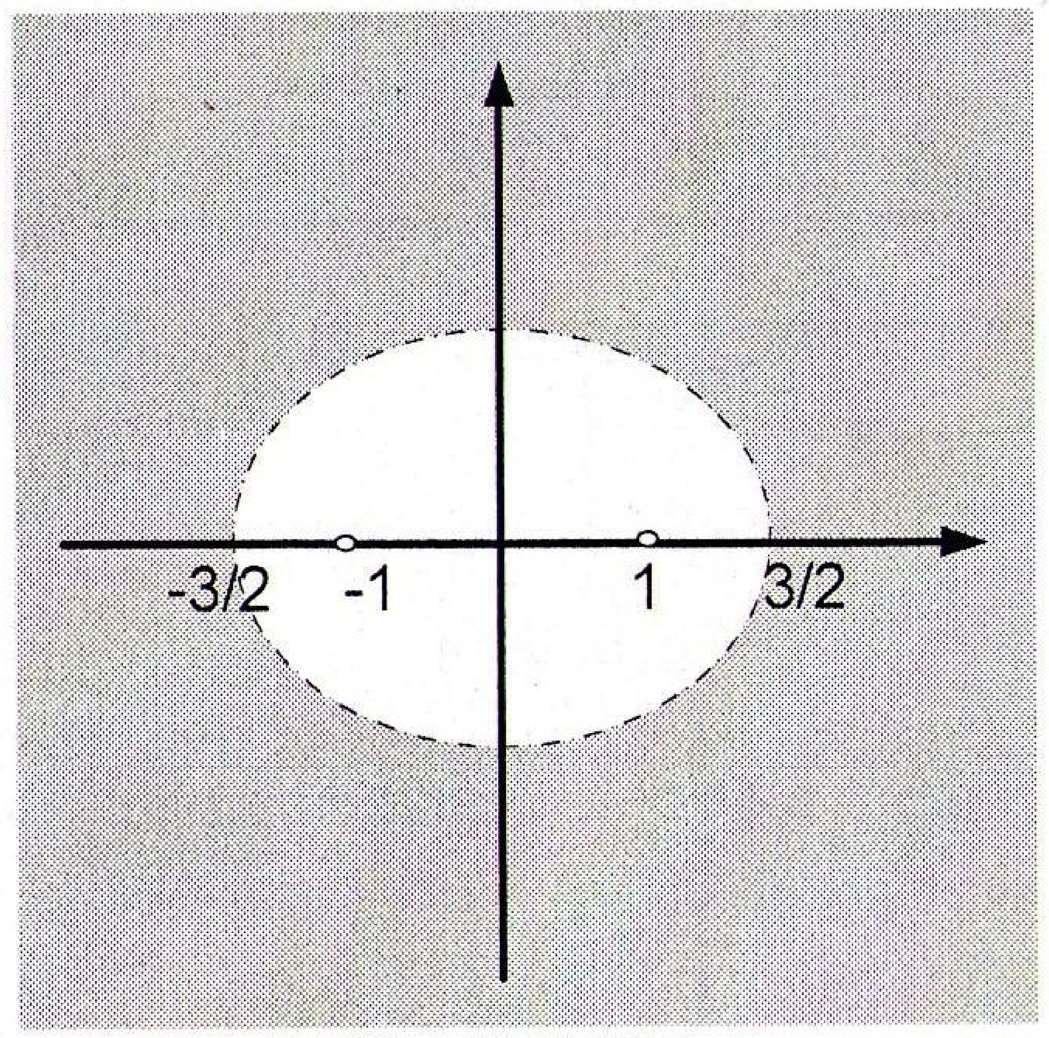


Fig. Ex-2.13

Exercício 2.14

Note que: $\dfrac{\bar{z}}{z-2i}+\dfrac{2z}{\bar{z}+2i}=\dfrac{\bar{z}}{z-2i}+2.\overline{\left(\dfrac{\bar{z}}{z-2i}\right)}=3$

Sendo: $w=\dfrac{\bar{z}}{z-2i}=a+b.i$, temos:

$$a+b.i+2a-2.bi=3 \quad \therefore \quad \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \operatorname{Re}\left(\dfrac{\bar{z}}{z-2i}\right)=1 \\ \operatorname{Im}\left(\dfrac{\bar{z}}{z-2i}\right)=0 \end{cases}$$

Sendo $z=x+y.i$ com x,y reais:

$$\frac{\bar{z}}{z-2i}=1 \Rightarrow \bar{z}=z-2i \quad \Rightarrow x-y.i=x+y.i-2i \quad \therefore \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ y=1 \end{cases}$$

Representando graficamente esta condição junto à condição $0<|z-2i|\le 1$ temos:

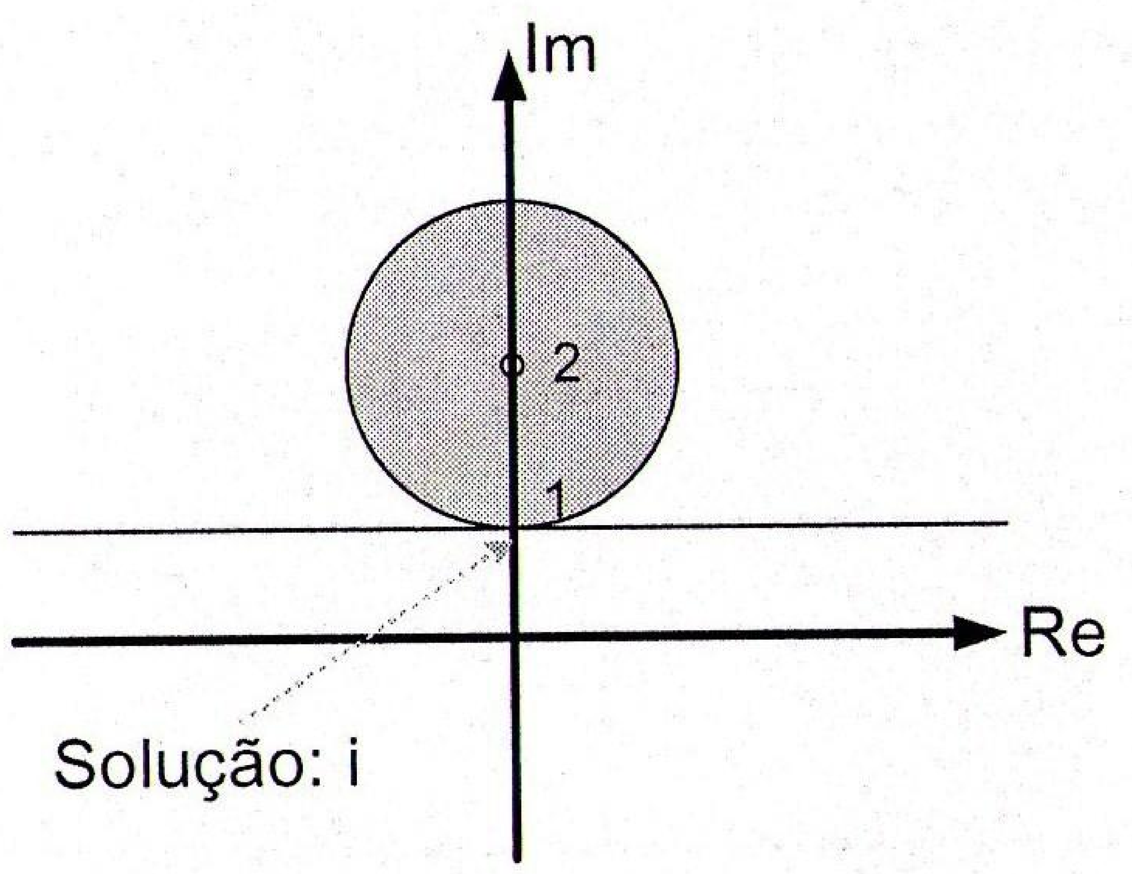


Fig. Ex-2.14

Devemos ver a interseção entre os dois conjuntos-condição.
A única solução é

$$\boxed{z=i}$$

Exercício 2.15
Da condição de existência do triângulo hachurado (a soma de dois lados é maior que o terceiro lado).

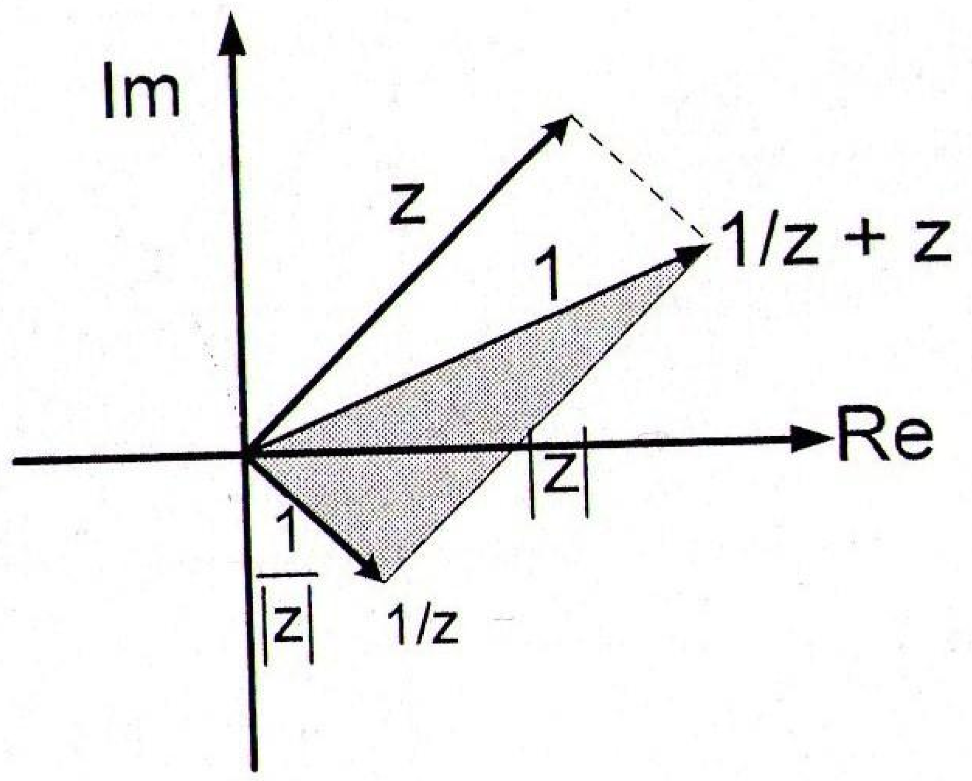


Fig. Ex-2.15

$$\begin{cases} 1+\dfrac{1}{|z|}\ge |z| \\ |z|>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z|>0 \\ |z|^2-|z|-1\ge 0 \end{cases} \Rightarrow 0<|z|\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{\therefore |z|_{max}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Exercício 2.16 Geometricamente é fácil ver quais serão os complexos de módulo e argumento mínimo.

$$|z-2+3i|=d(z,(2-3i))=1$$

Esse conjunto representa uma circunferência de centro (2,-3) e raio 1. (Seção 2.3)

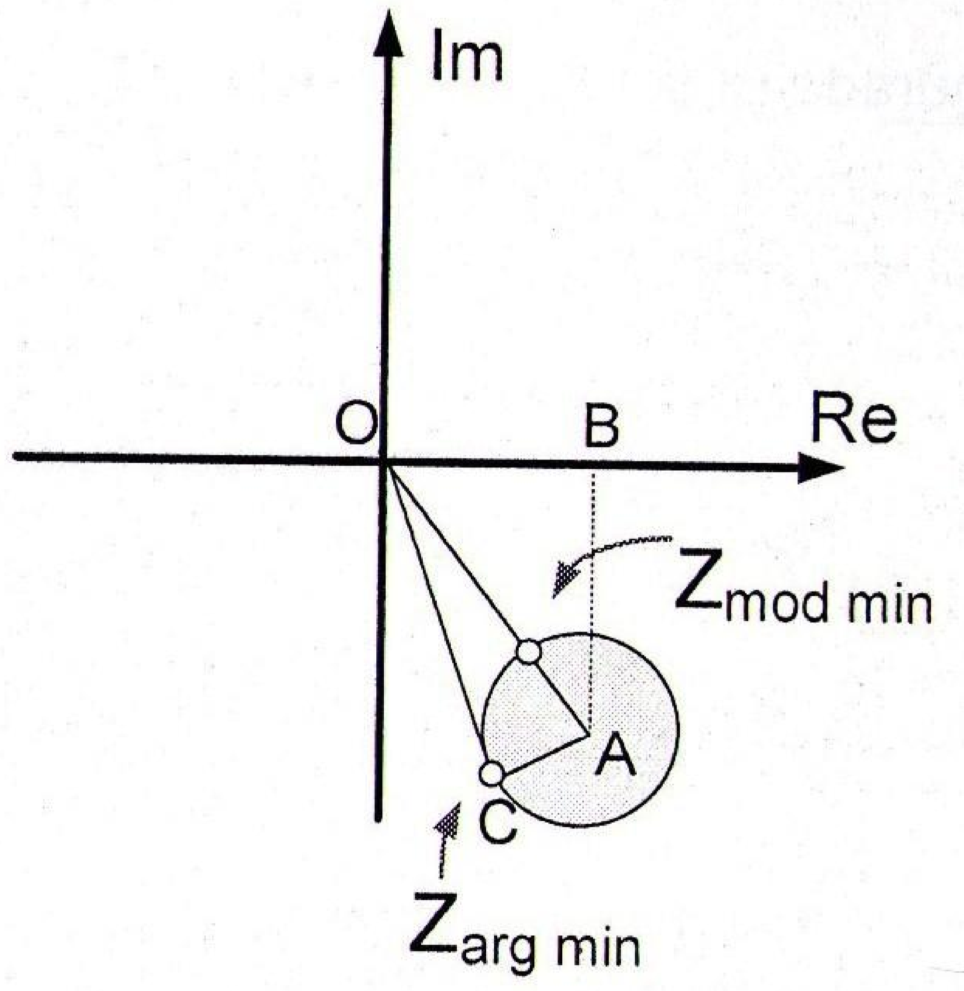


Fig. Ex – 2.16.a

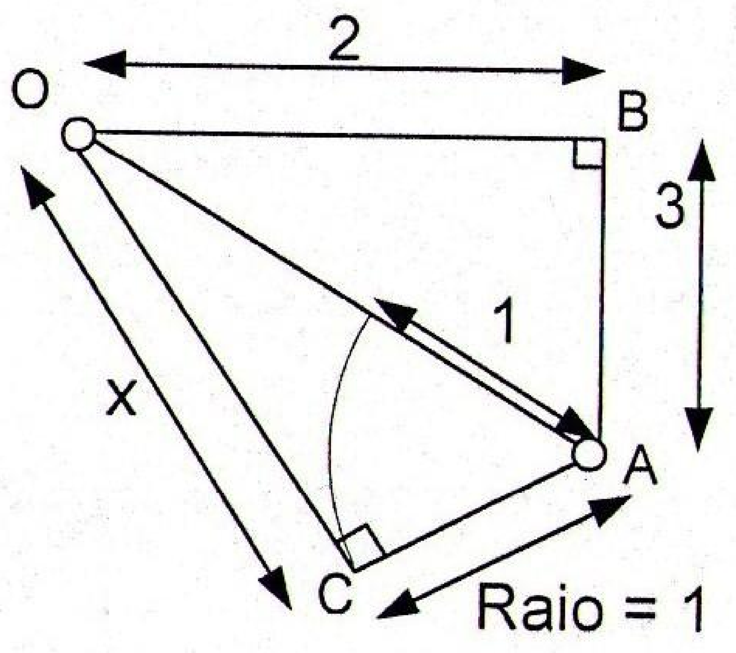


Fig. Ex – 2.16b

Aplicando o teorema de Pitágoras nos 2 triângulos da figura Fig. Ex-2.16b:

$$\begin{cases}\Delta OAC: & x^2+1^2=OA^2\\ \Delta OAB: & 2^2+3^2=OA^2\end{cases} \Rightarrow x^2+1^2=3^2+2^2 \quad \therefore \quad \boxed{x=|z|_{argmin}=2\sqrt{3}}$$

Além disso: $|z_{modmin}|=\sqrt{2^2+3^2}-1$ $\boxed{\therefore\ |z_{modmin}|=\sqrt{13}-1}$

Exercício 2.17 A representação geométrica no plano complexo de A é:

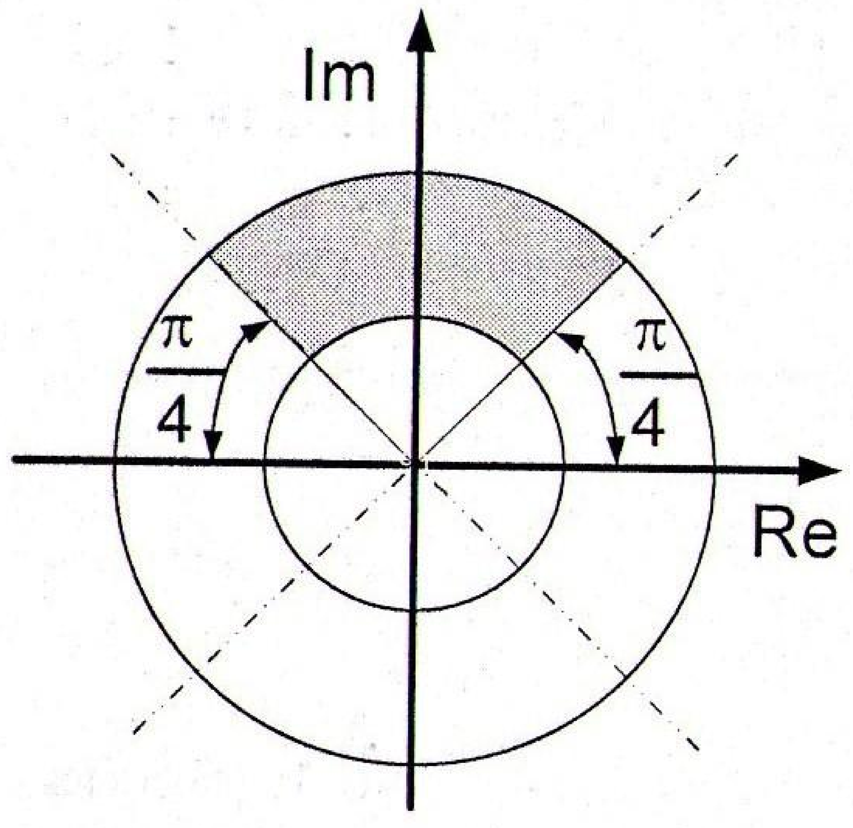


Fig. Ex-2.17.a

Multiplicar por (1+i) rotaciona cada complexo de A de $\arg(1+i)=45^\circ$ e multiplica o modulo de cada complexo de A por $|1+i|=\sqrt{2}$. Somar 3 translada o conjunto de 3 unidades pra direita no plano complexo.

A representação geométrica da imagem pedida é a hachurada escura na figura abaixo (a hachurada clara é a parte intermediária da solução antes da translação).

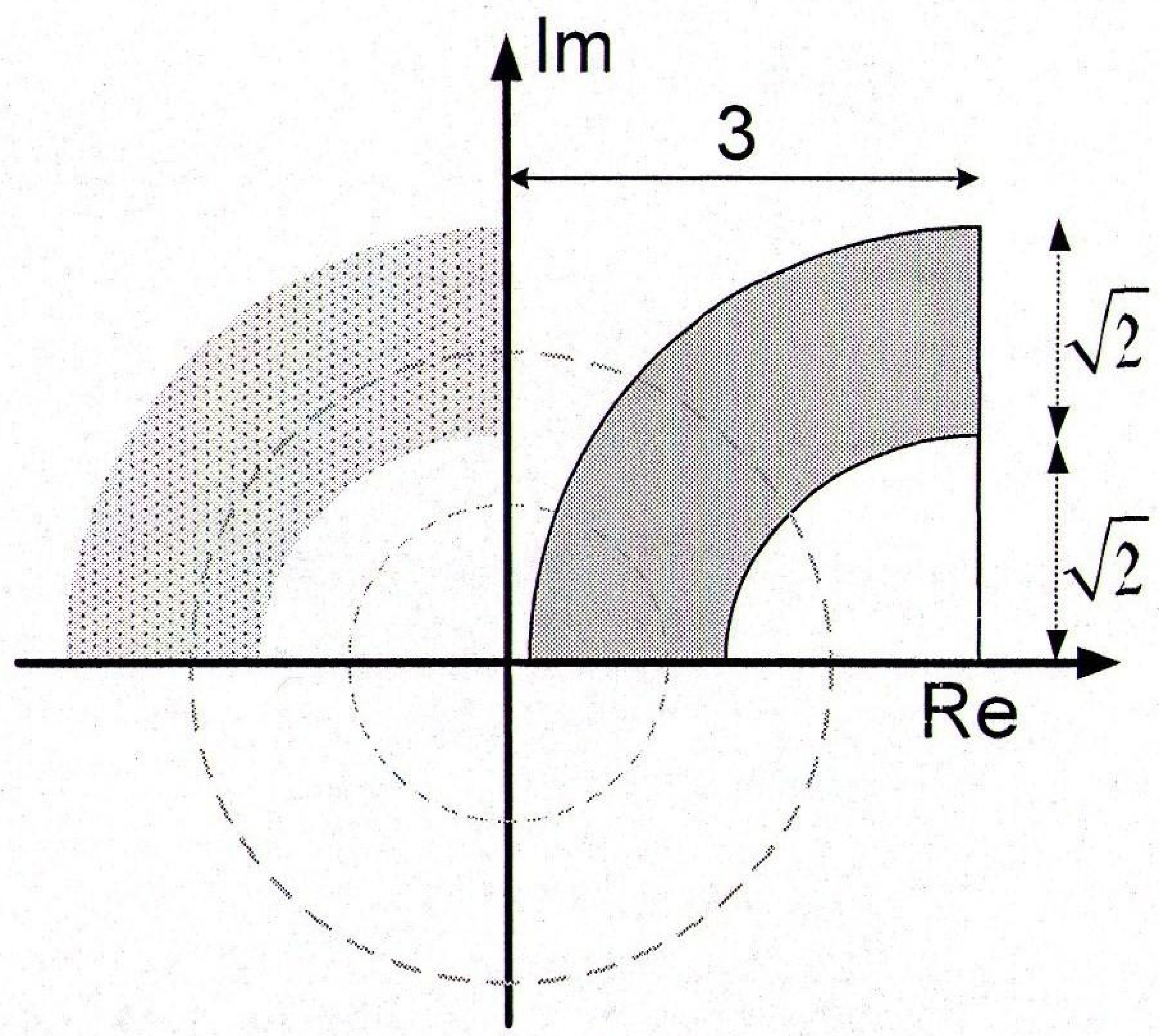


Fig. Ex-2.17.b

Exercício 2.18

Seguindo o exemplo do exercício anterior, analisaremos geometricamente o conjunto A e a rotação e translação feita pela função g sobre A.

De acordo com a teoria aprendida na Seção 2.1, multiplicar z por 4+3i rotacionará o conjunto A de arg(4+3i), que por ser uma circunferência não será alterado. Porém, ao mesmo tempo, cada complexo de A terá seu módulo ampliado em $|4+3i|=5$ vezes.

Somar (5 – i) translada o complexo resultante de 5 unidades pra direita e uma unidade pra baixo no plano complexo.

O resultado é uma circunferência de raio 5 e centro (5,-1), o que está coerente com o resultado encontrado analiticamente no exercício 1.11 do primeiro capítulo.

Representação geométrica:

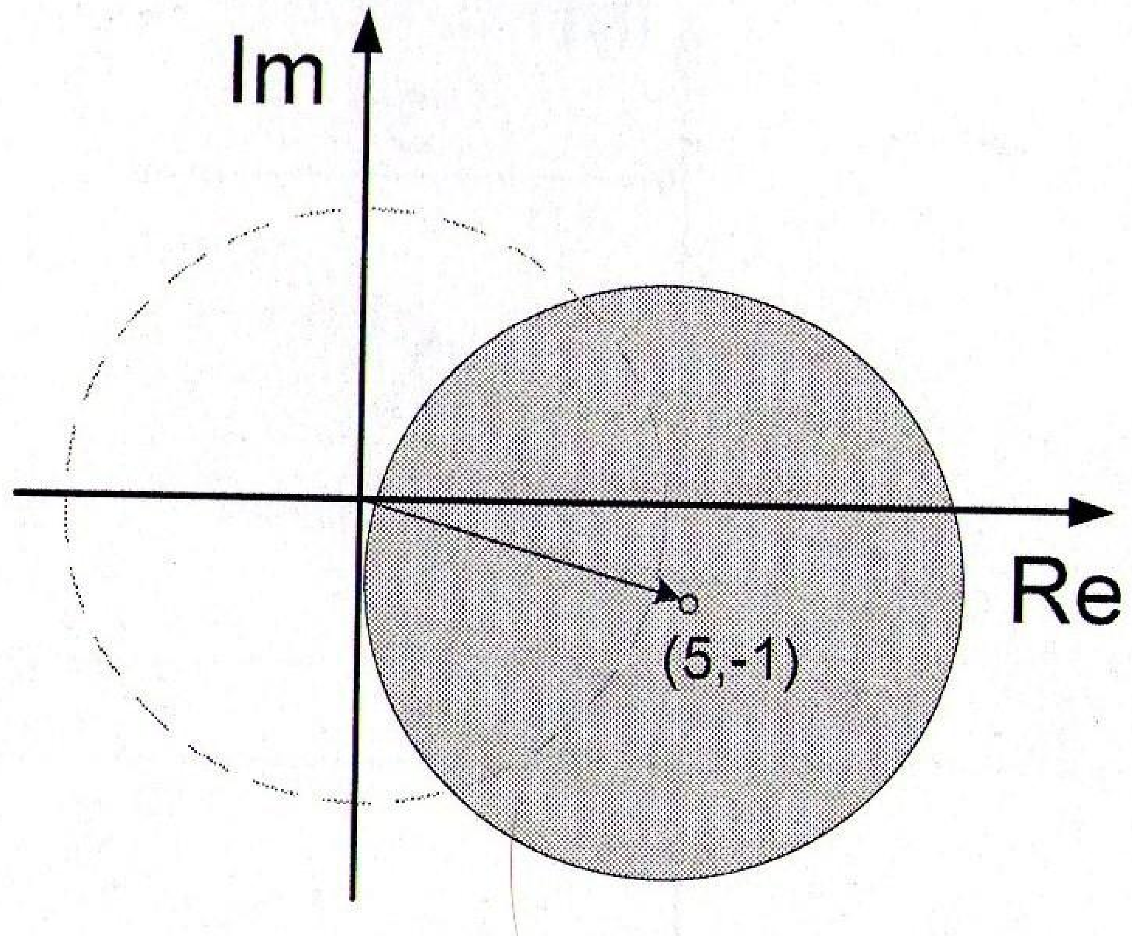


Fig. Ex-2.18

OBS: Comparar esta solução com a do exercício 1.11 mostra que a interpretação geométrica pode ser muito útil na resolução de exercícios.

Exercício 2.19

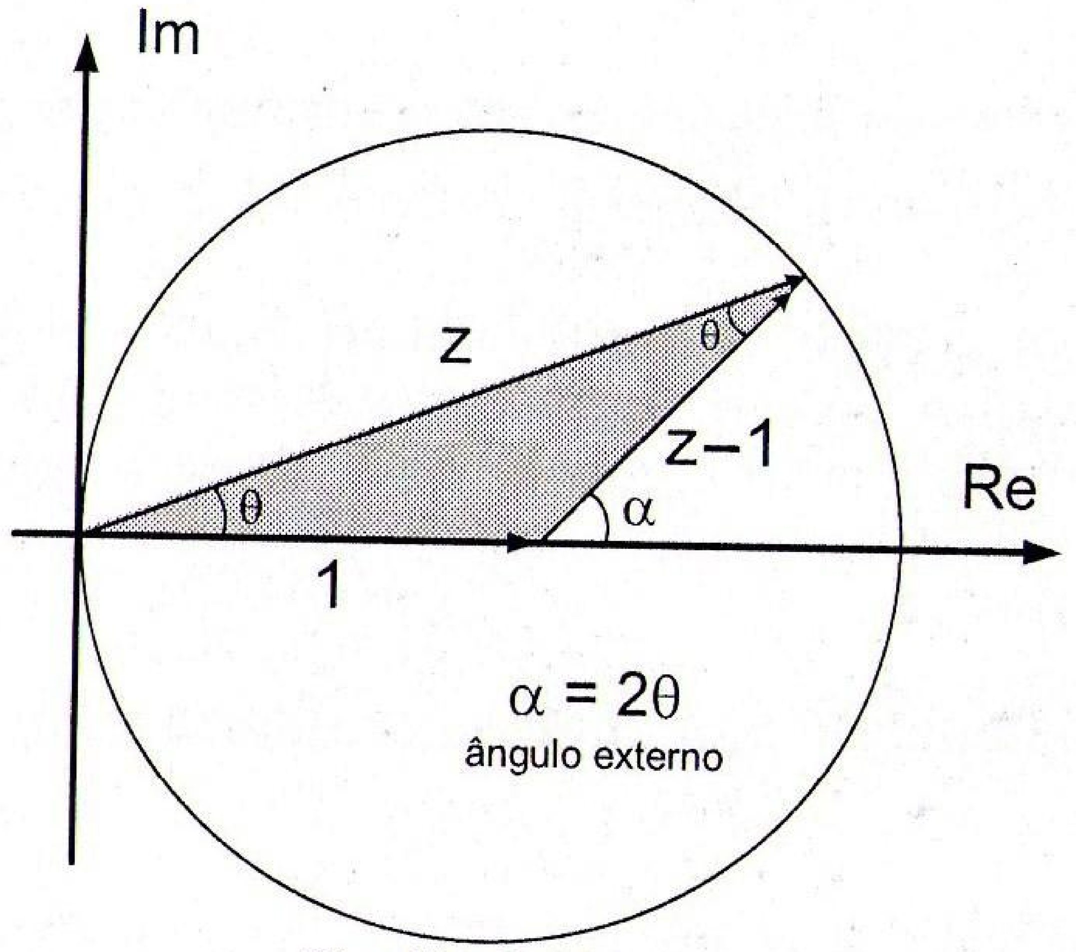


Fig. Ex-2.19

$|z-1| = 1$ representa uma circunferência de centro (1,0) e raio unitário. Do enunciado, temos que z está sobre essa circunferência como mostra a figura Fig. Ex-2.19 ao lado.

Analise primeiro o raciocínio geométrico desenvolvido na figura.

Do esboço geométrico da Figura 2.19, segue:

$$\arg(z-1) = \alpha = 2\theta = 2\arg(z)$$

Além disso:

$$\begin{cases} \arg(w) = \arg(z^2 - z) = \arg(z.(z-1)) = \arg(z) + \underbrace{\arg(z-1)}_{2.\arg(z)} = 3.\arg(z) \\ \arg(v) = \frac{2}{3}.\arg(w) = 2.\arg(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{zv}{w}\right)^2 = \left(\frac{|z|.\text{cis}(\arg(z)).|v|.\text{cis}(\arg(v))}{|w|.\text{cis}(\arg(w))}\right)^2$$

$$= \left(\frac{|z||v|}{|w|}\right)^2.(\text{cis}(\arg(z)+\arg(v)-\arg(w)))^2$$

$$= \left(\frac{|z||v|}{|w|}\right)^2.(\text{cis}(\arg(z)+2\arg(z)-3\arg(z)))^2$$

$$= \left(\frac{|z||v|}{|w|}\right)^2.(\text{cis}(0))^2 = \left(\frac{|z||v|}{|w|}\right)^2 \in \mathbb{R}$$

Exercício 2.20

$z = x + y.i,\ x, y \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k \Rightarrow |z-a| = |z-b|.k \Rightarrow (x-a)^2 + y^2 = k^2(x-b)^2 + k^2.y^2$$

$$\Rightarrow (k^2-1).x^2 + 2ax - 2k^2b.x + k^2b^2 - a^2 + (k^2-1).y^2 = 0$$

$$\overset{k\neq\pm1}{\Rightarrow} x^2 + \left(\frac{2a-2k^2b}{(k^2-1)}\right).x + y^2 = \frac{a^2-k^2b^2}{k^2-1}$$

$$\overset{k\neq1}{\Rightarrow} x^2 + \left(\frac{2a-2k^2b}{(k^2-1)}\right).x + y^2 + \frac{(a-k^2b)^2}{(k^2-1)^2} = \frac{a^2-k^2b^2}{k^2-1} + \frac{(a-k^2b)^2}{(k^2-1)^2}$$

$$\overset{k\neq1}{\Rightarrow} \left(x + \frac{a-k^2b}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{(a^2-k^2b^2).(k^2-1)+(a-k^2b)^2}{(k^2-1)^2}$$

O L.G. é uma circunferência, conhecida como Círculo de Apolônio.

Exercício 2.21

$$u.(z-a)^4+v.(z-b)^4=0 \overset{\text{Se } u\neq 0}{\Rightarrow} \frac{(z-a)^4}{(z-b)^4}=-\frac{v}{u} \Rightarrow \frac{(z-a)}{(z-b)}=\sqrt[4]{-\frac{v}{u}}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z-a}{z-b}\right|=\left|\sqrt[4]{-\frac{v}{u}}\right|=\begin{cases}0 \text{ se } v=0\\ 1 \text{ se } |v|=|u| \\ k\in\mathbb{R}\text{, caso contrario}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{se u ou } v=0 \Rightarrow |z-b|=0 \text{ ou } |z-a|=0 \Rightarrow \text{ z é um ponto}\\ \text{se } |v|=|u| \Rightarrow |z-a|=|z-b| \Rightarrow \text{ retas mediatriz de ab}\\ \text{caso contrario} \Rightarrow \text{Circulo de Apolônio}\end{cases}$$

Exercício 2.22 *Solução analítica:*

$$z=x+y.i,\ x,y\in\mathbb{R}$$

$$z+z^{-1}=x+y.i+\frac{1}{x+y.i}=x+y.i+\frac{x-y.i}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{(x^2+y^2).(x+y.i)+(x-y.i)}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{(x^3+y^2x+x)+(x^2.y+y^3-y).i}{x^2+y^2}$$

$$\therefore\ z+z^{-1}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z+z^{-1})=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2.y+y^3-y}{x^2+y^2}=0$$

$$\Leftrightarrow y.(x^2+y^2-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\ \text{ou}\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

Ou seja, a condição pedida é que z pertença à circunferência centrada na origem de raio unitário em união com a reta das abcissas do plano complexo (com exceção da origem pois z deve ser não nulo para que exista z^{-1} !)

Solução Geométrica: Em geral z e 1/z têm módulos diferentes porém argumentos simétricos.

Pois:

$$\begin{cases}z=|z|.\text{cis}\theta\\ z^{-1}=\frac{1}{|z|}.\text{cis}(-\theta)\end{cases}$$

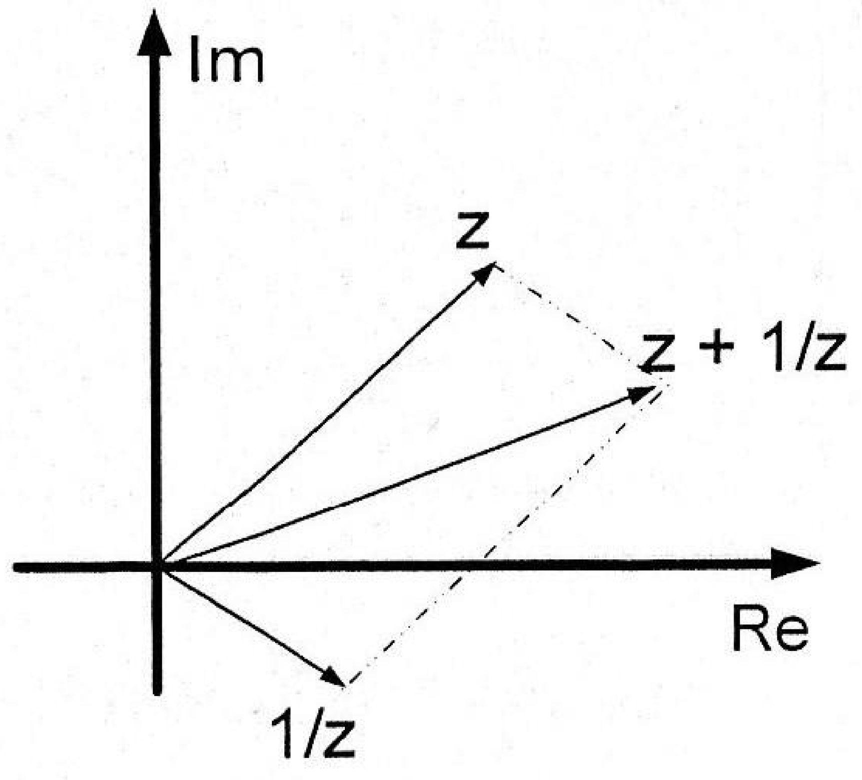


Fig. Ex-2.22

Isso faz com que o vetor soma não coincida com o eixo real. O vetor soma coincidirá com o eixo das abcissas quando o módulo de z e o módulo de 1/z forem iguais (Vide Fig. Ex-2.22)

$$|z|=\left|\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z|=\frac{1}{|z|} \Leftrightarrow |z|=1$$

Se z for real, 1/z também será e, portanto a soma também será real. Ou seja, para Im(z) = 0 temos $z+z^{-1}\in\mathbb{R}$. Portanto z deve descrever a circunferência de raio 1 centrada na origem ou pertencer à reta das abcissas no plano complexo (com exceção da origem!)

Exercício 2.23

$$Q=\left|\frac{z-3+i}{z-3-i}\right|=\frac{|z-(3-i)|}{|z-(3+i)|}=\frac{d_1}{d_2}$$

Estamos analisando um quociente Q entre distâncias, o que nos sugere usar geometria para a solução.

A imagem de A $(|z-3|=2)$ é uma circunferência de centro no complexo 3 e raio igual a 2, no plano complexo (Veja Seção 2.3 da parte de teoria).

O valor mínimo do quociente Q_{min} pedido acontecerá quando a distância d_2 de z a (3+i) for máxima e a distância d_1 de z a (3–i) for mínima – ou seja, quando o numerador for mínimo e o denominador for máximo para algum z pertencente à circunferência A.

Logicamente o valor máximo do quociente Q_{max} acontecerá quando o numerador d_1 for máximo e o denominador d_2 for mínimo.

Geometricamente fica fácil avaliar esses casos:

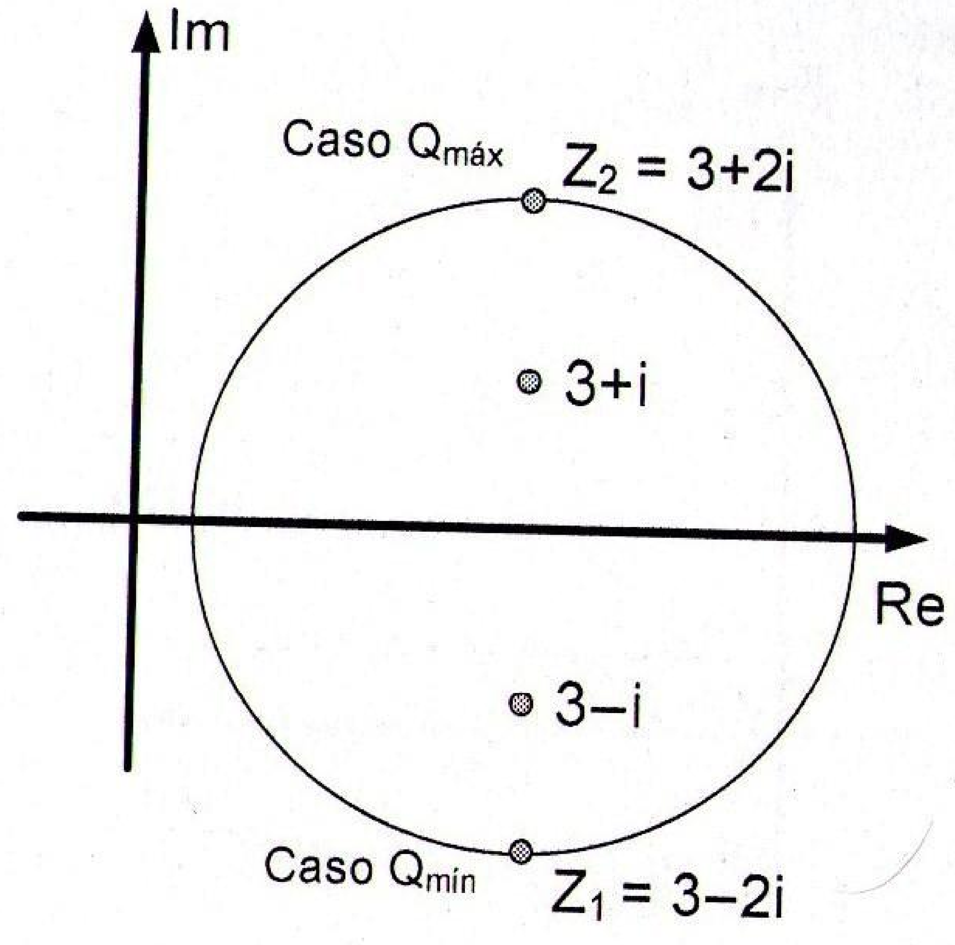


Fig. Ex-2.23.a

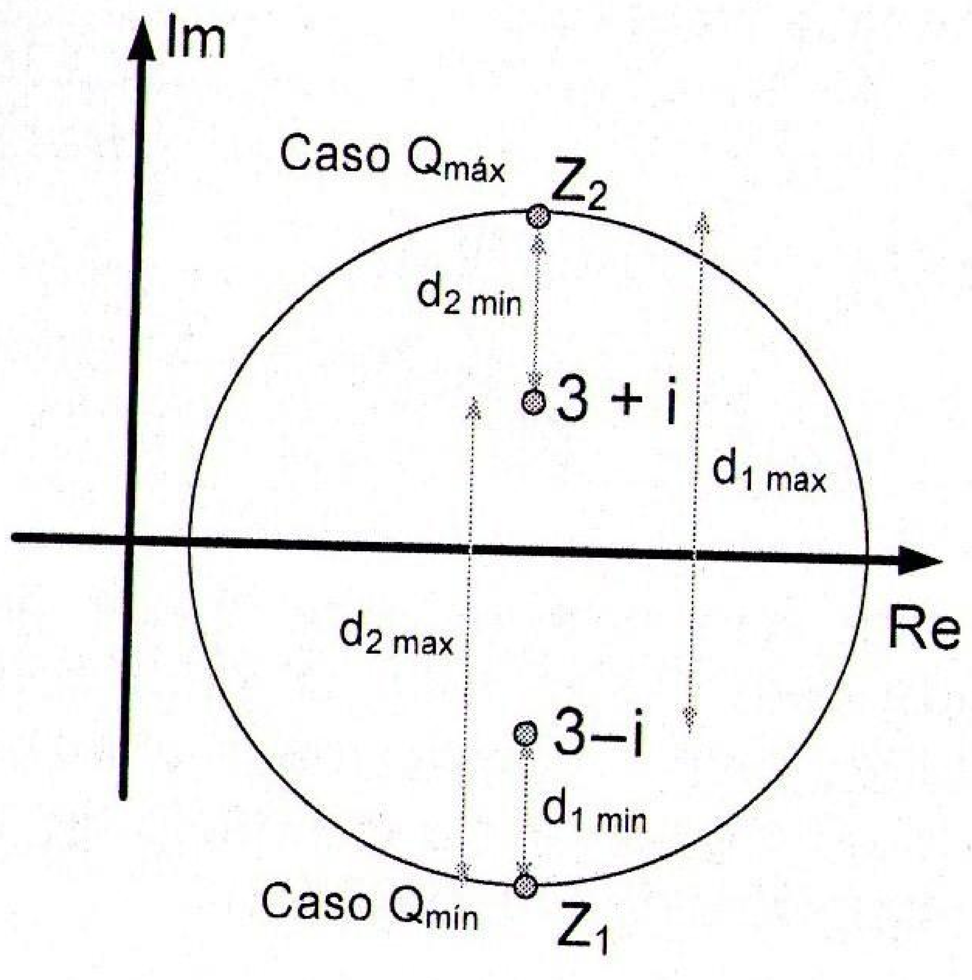


Fig. Ex-2.23.b

Com isso, das Figuras Ex-2.23a e Ex-2.23b, temos:

$$Q_{max} = \frac{d_{1\ max}}{d_{2\ min}} = \left|\frac{z_2-(3-i)}{z_2-(3+i)}\right| = \frac{3}{1} = 3 \text{ , que ocorre para } z_2 = 3+2i$$

$$Q_{min} = \frac{d_{1\ min}}{d_{2\ max}} = \left|\frac{z_1-(3-i)}{z_1-(3+i)}\right| = \frac{1}{3}\text{, que ocorre para } z_1 = 3-2i$$

Exercício 2.24

$$|z| = \frac{4}{|z|} = |z-3| \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |z| = \dfrac{4}{|z|} \\ |z| = |z-3| \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |z| = 2 \\ |z| = |z-3| \end{cases}$$

Ou seja, z pertence a uma circunferência de raio 2 (centrada na origem) e também à reta mediatriz do segmento que liga os complexos 0 e 3.

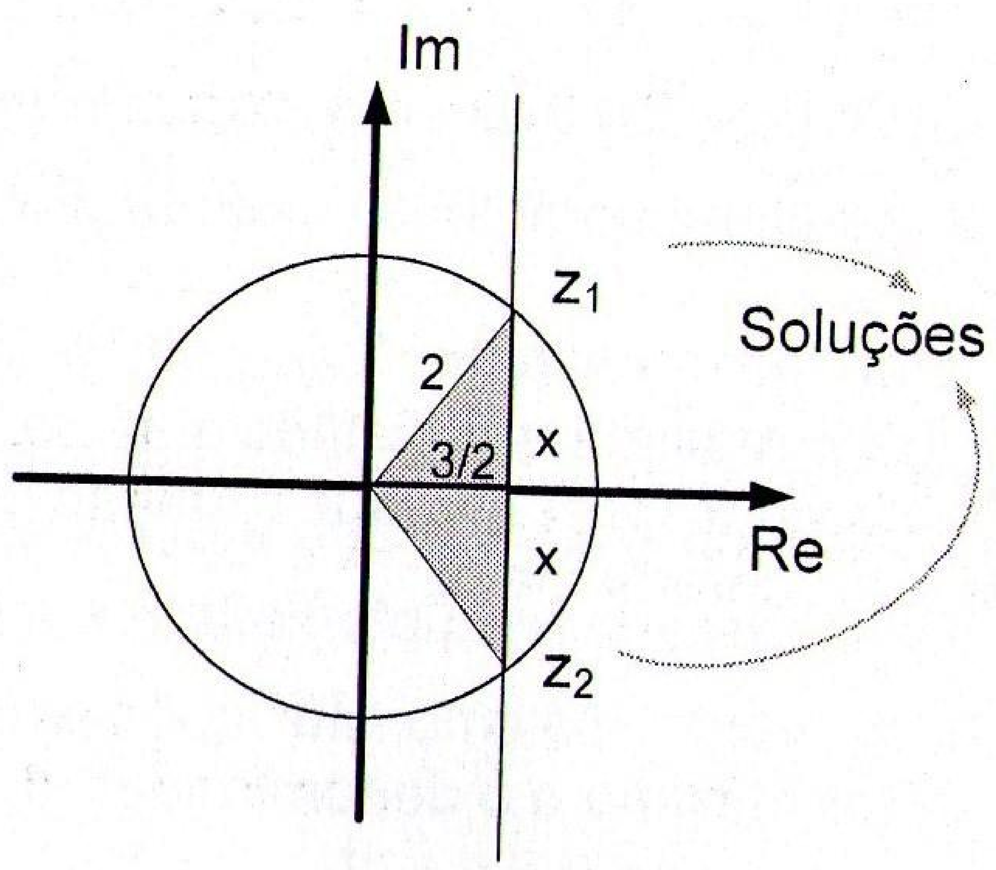


Fig. Ex-2.24

Do Pitágoras no triângulo hachurado da figura 2.24:

$$x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2^2 \quad \therefore \quad x = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Portanto, os complexos-solução do problema são:

$$\boxed{\frac{3 \pm i.\sqrt{7}}{2}}$$

Exercício 2.25

Seja $z_1 = 1.\text{cis}\theta$ e $z_2 = 1 - z_1 = 1 - \text{cis}\theta$ representados abaixo no plano complexo:

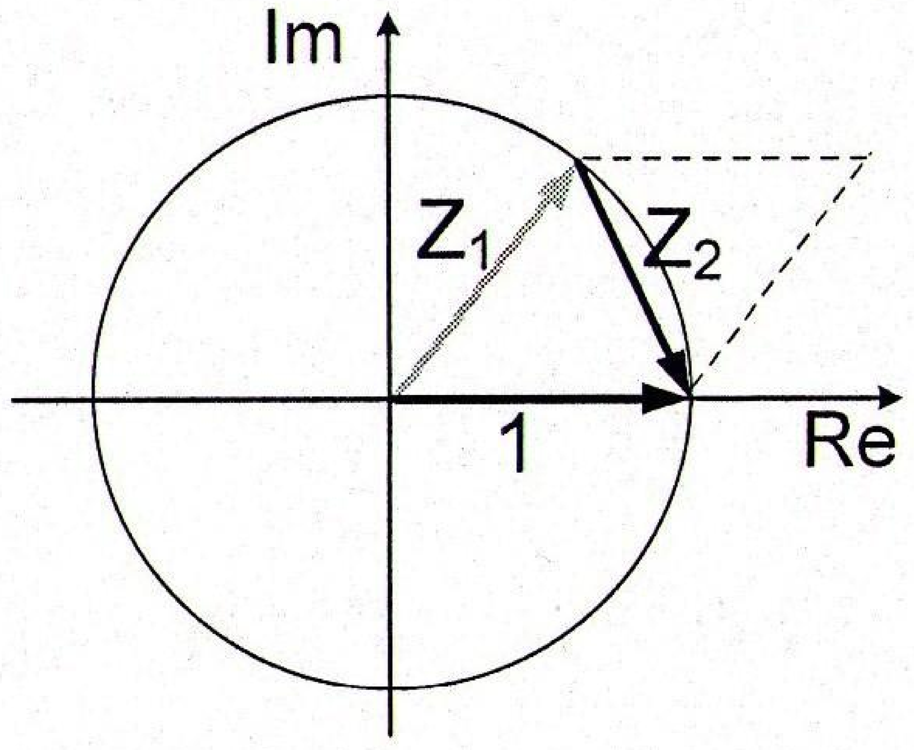


Fig. Ex-2.25.a

Ampliando a imagem de interesse, analise o raciocínio envolvendo os ângulos da figura abaixo:

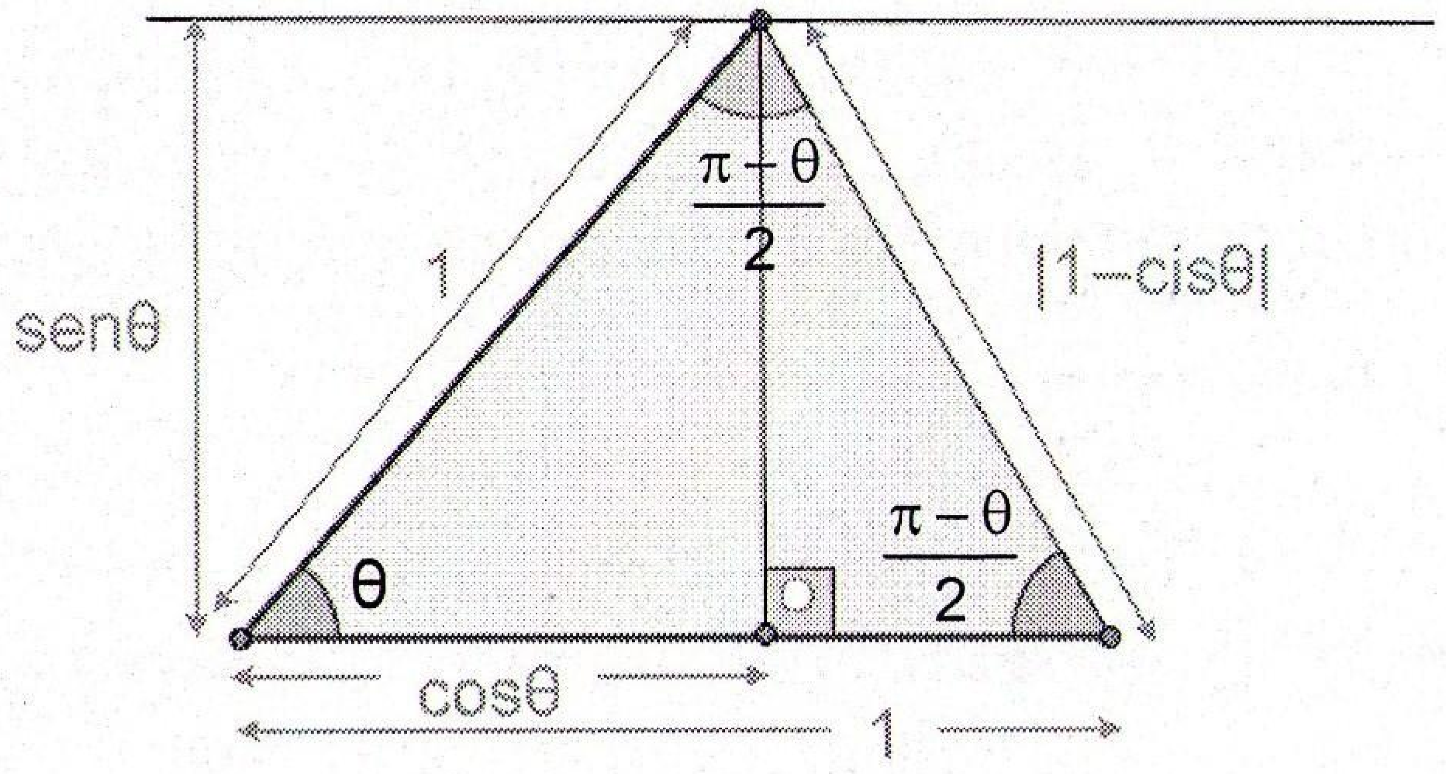


Fig. Ex-2.25.b

Da figura 2.25b, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo MBA:

$$|1-\text{cis}\theta|^2 = \text{sen}^2\theta + (1-\cos\theta)^2 = 2-2.\cos\theta = 2.\left(2.\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$\therefore\ |1-\text{cis}\theta| = 2.\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Da geometria angular do problema:

$$\frac{\pi-\theta}{2} = -\arg(1-\text{cis}\theta) \Rightarrow \arg(1-\text{cis}\theta) = -\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$$

Com isso:

$$1-\text{cis}\theta = |1-\text{cis}\theta|.\text{cis}(\arg(1-\text{cis}\theta)) = 2.\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right).\text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2.\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right).\text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right).\text{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right) = -2.i.\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right).\text{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Exercício 2.26

Seja $z = a + b.i$; $w = c + d.i$

$$\frac{1}{2}|\text{Im}(\bar{z}.w)| = \frac{1}{2}|\text{Im}((a-b.i).(c+d.i))| = \frac{1}{2}|ac+bd| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right\| = \text{Area}(z,w)$$

Consulte um livro de Geometria Analítica caso tenha dificuldade em entender a dedução acima.

OBS: Esse resultado tem como corolário o seguinte resultado:

$$\boxed{\text{Im}(\bar{z}.w) = |z \times w|}$$

Onde *z x w* é o produto vetorial entre o vetor representante de z e w.

Usando o resultado acima, tomando:

$$\begin{cases} z = (-4-i)-(1+2i) = -5-3i \\ w = (-4-i)-(4-3i) = -8+2i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Area}(z,w) = \frac{|\text{Im}((3i-5)(-8+2i))|}{2} = \frac{|-34|}{2} = 17$$

Exercício 2.27 Esse problema é tão interessante que motivou a produção da capa do presente livro. Segundo o problema afirma, sua solução existe mesmo sem conhecermos a posição do canteiro K. Ou seja, a posição do tesouro deve independer da posição do canteiro. O esquema do problema é ilustrado na figura a seguir:

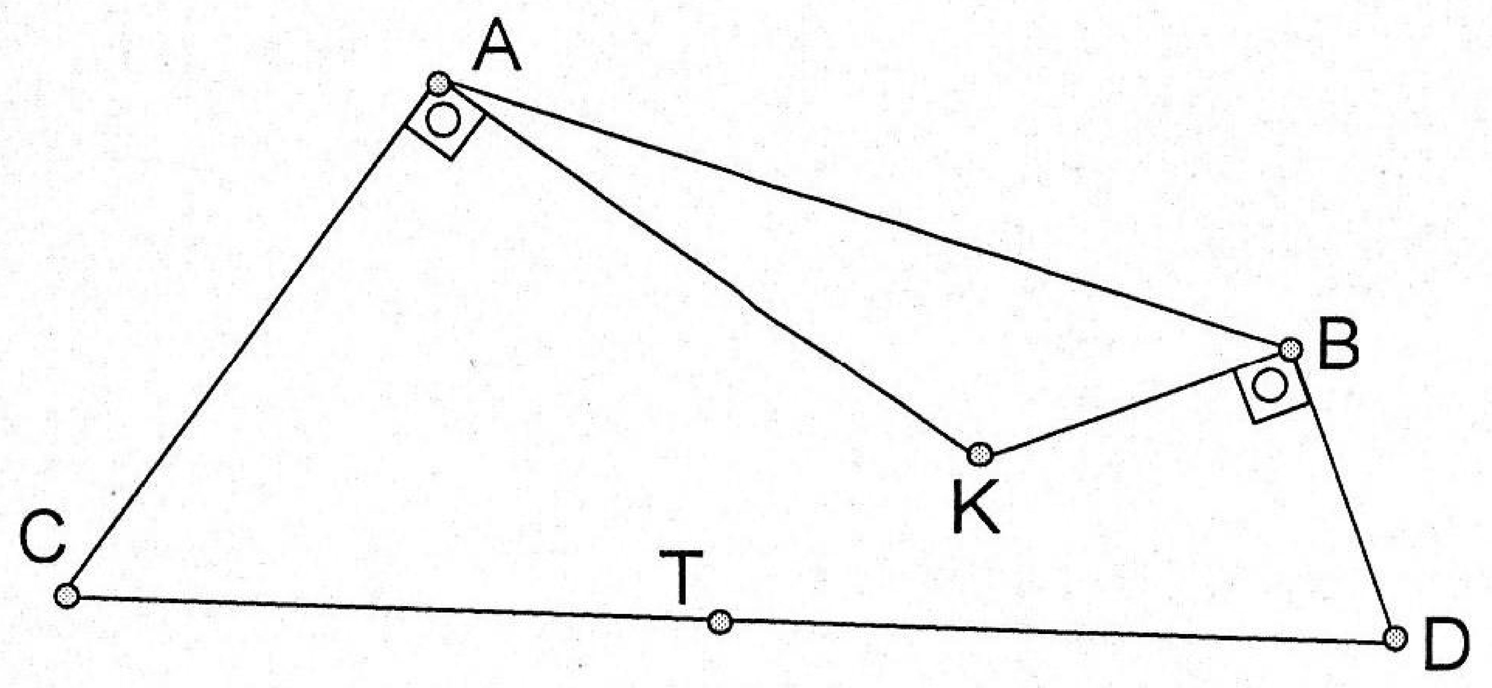


Fig. Ex-2.27

Consideremos o sistema de coordenadas como o plano complexo. Da perpendicularidade dos vetores, podemos escrever:

$$\begin{cases} \overrightarrow{KA}.\ i = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{KB}.\ (-i) = \overrightarrow{BD} \end{cases}$$

De onde segue: $\begin{cases} (A-K).i = C-A \\ (K-B).i = D-B \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} C = A.(1+i)-K.i \\ D = B.(1-i)+K.i \end{cases}$

O manuscrito diz que T é o ponto médio de C e D. Das expressões acima, podemos escrever:

$$T = \frac{C+D}{2} = \frac{A.(1+i)-\cancel{K.i}+B.(1-i)+\cancel{K.i}}{2} = \frac{A.(1+i)+B.(1-i)}{2}$$

Veja que interessante! De fato, a posição de T não depende da posição de K.

$$T = \frac{(5+3.i).(1+i)+(8+2i).(1-i)}{2} = 6+i$$

O tesouro tem posição com coordenadas (6,1) no mesmo referencial de A e B.

$$\boxed{T = (6,1)}$$

Soluções – Capítulo 3

Exercício 3.1

$$(1+x+x^2)^n = A_0 + A_1.x + A_2.x^2 + ... + A_{2n}.x^{2n}$$

Fazendo $x = 1$ no trinômio dado:

$$(1+1+1^2)^n = A_0 + A_1.1 + A_2.1^2 + ... + A_{2n}.1^{2n}$$

$$\therefore \quad A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_{2n} = 3^n \quad \textbf{(Eq. I)}$$

Fazendo $x = -1$ no trinômio dado:

$$(1+(-1)+(-1)^2)^n = A_0 + A_1.(-1) + A_2.(-1)^2 + ... + A_{2n}.(-1)^{2n}$$

$$\Rightarrow \quad A_0 - A_1 + A_2 - + ... + A_{2n} = 1 \quad \textbf{(Eq. II)}$$

Fazendo $\dfrac{(I)+(II)}{2}$:

$$\therefore \quad A_0 + A_2 + A_4 ... + A_{2n} = \frac{3^n+1}{2} \quad \textbf{(Eq. III)}$$

Fazendo $\dfrac{(I)-(II)}{2}$:

$$\therefore \quad A_1 + A_3 + A_5 ... + A_{2n-1} = \frac{3^n-1}{2} \quad \textbf{(Eq. IV)}$$

Fazendo $x = i$ no trinômio dado:

$$(1+i+i^2)^n = A_0 + A_1.i + A_2.i^2 + ... + A_{2n}.i^{2n}$$

$$\Rightarrow \quad (A_0 - A_2 + A_4 - A_6 + - ...) + i.(A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + - ...) = i^n \quad (*)$$

Lembrando que podemos escrever: $i = \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Portanto, da Lei de Moivre, podemos também escrever:

$$i^n = \text{cis}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Da identidade dos números complexos, igualando parte real a parte real em ambos os lados temos:

$$A_0 - A_2 + A_4 - A_6 + - ... = \text{Re}(i^n)$$

$$\therefore \quad A_0 - A_2 + A_4 - A_6 + - ... = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \textbf{(Eq. V)}$$

e) Novamente, da mesma identidade acima, igualando parte imaginária a parte imaginária em ambos os lados da expressão (*):

$$A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + - ... = \text{Im}(i^n)$$

$$\therefore \quad A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + - ... = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \textbf{(Eq. VI)}$$

e) Fazendo $\dfrac{(III)+(V)}{2}$:

$$\therefore \quad A_0 + A_4 + A_8 + A_{12} + ... = \frac{(3^n+1) + 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{4} \quad \textbf{(Eq. VII)}$$

Exercício 3.2 Usaremos os resultados já calculados na seção 3.1, na parte de teoria:

$$\begin{cases} \text{(i) } C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + - ... = (2)^{n/2}.\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \text{(Resultado 3.1.5)} \\ \text{(ii) } C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + ... = 2^{n-2} + (2)^{(n-2)/2}.\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \text{(Resultado 3.1.6)} \end{cases}$$

Fazendo (ii)-(i):

$$C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + C_n^{14} ... = 2^{n-2} + (2)^{(n-2)/2}.\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - (2)^{n/2}.\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$= 2^{n-2} + \left((2)^{n/2}.\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right).(2^{-1}-1)$$

$$\therefore \quad \boxed{C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + C_n^{14} \ldots = 2^{n-2} - (2)^{(n-2)/2}.\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$$

(Resultado 7.3.2)

Exercício 3.3 Novamente, usaremos os resultados já calculados na seção 3.1, na parte de teoria:

$$\begin{cases} C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + - \ldots = (2)^{n/2}.\text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \text{(Resultado 3.1.5)} \\ C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + C_n^{13} + \ldots = 2^{n-2} + (2)^{(n-2)/2}.\text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \text{(Resultado 3.1.6)} \end{cases}$$

Procedendo de forma análoga à questão anterior chegamos a:

$$\therefore \quad \boxed{C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + C_n^{15} + \ldots = 2^{n-2} - (2)^{(n-2)/2}.\text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$$

(Resultado 7.3.3)

Exercício 3.4 Antes de começarmos, vamos definir duas outras somas para auxiliar o raciocínio (o porquê disso será compreendido mais a frente na resolução):

$$S_2 = C_n^1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^5 + \ldots = 2^n - S_0$$
$$S_3 = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + C_n^{11} + \ldots = 2^n - S_0 - S_1$$

Vamos desenvolver o binômio de Newton sugerido:

$$\left(1 + \text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^n = C_n^0.\left(\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^0 + C_n^1.\left(\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^1 + \ldots + C_n^n.\left(\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^n =$$

$$= C_n^0 + C_n^1.\left(\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right) + C_n^2.\left(\text{cis}\frac{4\pi}{3}\right) + \ldots + C_n^n.\left(\text{cis}\frac{2.n.\pi}{3}\right) =$$

$$= C_n^0 + C_n^1.\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + C_n^2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + C_n^3.1 + \ldots + C_n^n\left(\text{cis}\frac{2n\pi}{3}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}.C_n^1 - \frac{1}{2}.C_n^2 + C_n^3 - + \ldots\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}.C_n^1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.C_n^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}.C_n^4 - + \ldots\right).i =$$

$$= \left(S_0 - \frac{1}{2}.S_2\right) + \frac{i.\sqrt{3}}{2}(S_1 - S_3)$$

$$= \left(S_0 - \frac{1}{2}.(2^n - S_0)\right) + \frac{i.\sqrt{3}}{2}\left(S_1 - (2^n - S_0 - S_1)\right)$$

$$= \left(\frac{3S_0}{2} - 2^{n-1}\right) + \frac{i.\sqrt{3}}{2}\left(2S_1 - 2^n + S_0\right)$$

Segue então que:

$$\begin{cases} \text{Re}\left(1 + \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^n = \left(\frac{3S_0}{2} - 2^{n-1}\right) \\ \text{Im}\left(1 + \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2S_1 - 2^n + S_0\right) \end{cases} \quad (*)$$

Ora, mas:

$$\left(1 + \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\text{cis}\frac{\pi}{3}\right)^n = \text{cis}\frac{n\pi}{3}$$

Então, voltando em (*):

$$\text{Re}\left(1 + \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \left(\frac{3S_0}{2} - 2^{n-1}\right)$$

$$\text{Im}\left(1 + \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^n = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2S_1 - 2^n + S_0\right)$$

De onde segue que:

$$S_0 = \frac{2.\cos\frac{n\pi}{3} + 2^n}{3}$$

$$S_1 = \frac{\left[-\cos\frac{n\pi}{3} + 2^n + \sqrt{3}.\text{sen}\frac{n\pi}{3}\right]}{3}$$

Exercício 3.5 Desenvolvendo:

$$(1+i)^{4n} = 1 + C_{4n}^{1}.i + C_{4n}^{2}.i^2 + C_{4n}^{3}.i^3 + \ldots + C_{4n}^{4n}.i^{4n}$$

A soma pedida é a parte real do desenvolvimento:

$$1 - C_{4n}^{2} + C_{4n}^{4} - \ldots - C_{4n}^{4n-2} + 1 = \text{Re}(1+i)^{4n}$$

Melhorando:

$$(1+i)^{4n} = \left(\sqrt{2}.\text{cis}\frac{\pi}{4}\right)^{4n} = 2^{4n/2}.\text{cis}\left(\frac{4n\pi}{4}\right) = 2^{2n}.\text{cis}(n\pi)$$

$$\therefore\ \text{Re}(1+i)^{4n} = 2^{2n}.\cos(n\pi) = 2^{2n}.(-1)^n$$

Portanto:

$$\boxed{1 - C_{4n}^{2} + C_{4n}^{4} - \ldots - C_{4n}^{4n-2} + 1 = (-1)^n.2^{2n}}$$

Exercício 3.6

$$C_n^1.\text{sen}(x) + C_n^2.\text{sen}(2x) + \ldots + C_n^n.\text{sen}(n.x)$$

A soma pedida nos sugere que façamos o desenvolvimento do seguinte binômio de Newton:

$$(1+\text{cis}x)^n = 1 + C_n^1.(\text{cis}x)^1 + C_n^2.(\text{cis}x)^2 + C_n^3.(\text{cis}x)^3 + \ldots + C_n^n.(\text{cis}x)^n$$

$$= 1 + C_n^1.(\text{cis}x) + C_n^2.(\text{cis}(2x)) + \ldots + C_n^n.(\text{cis}(nx))$$

A soma pedida é a parte imaginária do desenvolvimento acima.

$$C_n^1.\text{sen}(x) + C_n^2.\text{sen}(2x) + \ldots + C_n^n.\text{sen}(n.x) = \text{Im}(1+\text{cis}x)^n$$

Vamos tentar simplificar a expressão matemática para a parte imaginária do binômio. Usaremos um resultado já mostrado no capítulo 1 do livro (Fórmula 1.3.1)

$$(1+\text{cis}x) = 2.\cos\left(\frac{x}{2}\right).\text{cis}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\therefore\ \text{Im}(1+\text{cis}x)^n = \text{Im}\left(2.\cos\left(\frac{x}{2}\right).\text{cis}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n$$

$$= \text{Im}\left(2^n.\cos^n\left(\frac{x}{2}\right).\text{cis}\left(\frac{nx}{2}\right)\right)$$

$$= 2^n.\cos^n\left(\frac{x}{2}\right).\text{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)$$

A soma pedida vale, então:

$$C_n^1.\text{sen}(x) + C_n^2.\text{sen}(2x) + \ldots + C_n^n.\text{sen}(n.x) = 2^n.\cos^n\left(\frac{x}{2}\right).\text{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)$$

Exercício 3.7

$$\sum_{k=0}^{n} k^2.C_n^k = C_n^1 + 4.C_n^2 + 9.C_n^3 + \ldots + n^2.C_n^n$$

Vamos utilizar o desenvolvimento do binômio de Newton.

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} (x)^k.C_n^k$$

Derivando em ambos os lados da expressão em relação a x:

$$n.(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k.(x)^{k-1}.C_n^k$$

Note que conseguimos o fator k no somatório à direita. Queremos, na verdade, que apareça o fator k². Multiplicando a expressão, em ambos os lados, por x:

$$n.x.(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k.(x)^k.C_n^k$$

(Resultado 7.3.7.a)

Derivando novamente, em relação a x (devemos ter cuidado, pois agora estamos derivando um produto de funções de x), aparecerá o desejado fator k² no somatório:

$$n.(1+x)^{n-1}+n.(n-1).x.(1+x)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}k^2.(x)^{k-1}.C_n^k$$

Multiplicando por x, finalmente, chegamos a um resultado que será útil também no próximo exercício.

$$\boxed{n.x.(1+x)^{n-1}+n.(n-1).x^2.(1+x)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}k^2.(x)^{k}.C_n^k}$$

(Resultado 7.3.7.b)

Ora, o somatório a direita é justamente a soma pedida, adicionada de um fator x^k. Fazendo $x = 1$ chegamos ao resultado pedido:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}k^2.C_n^k=n.2^{n-1}+n.(n-1).2^{n-2}}$$

Exercício 3.8

$$\sum_{k=0,4,8,...}k^2.C_n^k$$

Vamos partir de um resultado obtido no item anterior (Resultado 7.3.7b):

$$n.x.(1+x)^{n-1}+n.(n-1).x^2.(1+x)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}k^2.(x)^{k}.C_n^k$$

Fazendo $x = -1$ temos:

$$n.(-1).\underbrace{(1-1)^{n-1}}_{0}+n.(n-1).(-1)^2.\underbrace{(1-1)^{n-2}}_{0}=\sum_{k=0}^{n}k^2.(-1)^{k}.C_n^k$$

Com isso temos:

$$\begin{cases}C_n^1+4.C_n^2+9.C_n^3+...+n^2.C_n^n=n.2^{n-1}+n.(n-1).2^{n-2} & \text{(I)}\\ -C_n^1+4.C_n^2-9.C_n^3+-...+(-1)^n.n^2.C_n^n=0 & \text{(II)}\end{cases}$$

Somando as duas equações e dividindo o resultado por 2:

$$2^2.C_n^2+4^2.C_n^4+6^2.C_n^6+...=n.(n-1).2^{n-3}+n.2^{n-2} \quad \textbf{(Eq. I)}$$

Fazendo $x = i$ no Resultado 7.3.7b, temos:

$$n.(i).(1+i)^{n-1}+n.(n-1).(i)^2.(1+i)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}k^2.(i)^{k}.C_n^k$$

Com isso temos:

$$\sum_{k=0}^{n}k^2.(i)^k.C_n^k=n.\left(\text{cis}\frac{\pi}{2}\right).\left(\sqrt{2}.\text{cis}\frac{\pi}{4}\right)^{n-1}+n.(1-n).\left(\sqrt{2}.\text{cis}\frac{\pi}{4}\right)^{n-2}$$

$$=\underbrace{n.2^{\frac{n-1}{2}}.\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{(n-1)\pi}{4}\right)+n.(1-n).2^{\frac{n-2}{2}}.\text{cis}\left(\frac{(n-2)\pi}{4}\right)}_{z}$$

Segue então que:

$$\sum_{k=0}^{n}k^2.(i)^k.C_n^k=C_n^1.(1)^2.i-C_n^2.(2)^2-C_n^3.(3)^2.i+-...=z$$

E, com isso, temos:

$$\text{Re}(z)=-2^2.C_n^2+4^2.C_n^4-6^2.C_n^6+-...$$

$$=n.2^{\frac{n-1}{2}}.\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{(n-1)\pi}{4}\right)+n.(1-n).2^{\frac{n-2}{2}}.\cos\left(\frac{(n-2)\pi}{4}\right)$$

$$=n.(1-n).2^{\frac{n-2}{2}}.\cos\left(\frac{(n-2)\pi}{4}\right)-n.2^{\frac{n-1}{2}}.\text{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right) \quad (*)$$

Temos em mãos as seguintes relações:

$$\begin{cases}2^2.C_n^2+4^2.C_n^4+6^2.C_n^6+...=n.(n-1).2^{n-3}+n.2^{n-2} & \text{(Eq.I)}\\ -2^2.C_n^2+4^2.C_n^4-6^2.C_n^6+-...=\text{Re}(z) & \text{(Eq.II)}\end{cases}$$

Somando as duas equações e dividindo o resultado por 2, segue:

$$\sum_{k=0,4,8,...}k^2.C_n^k=n.(n-1).2^{n-4}+n.2^{n-3}+\frac{\text{Re}(z)}{2}$$

Por fim, utilizando (*):

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{k=0,4,8,...}k^2.C_n^k&=n.(n-1).2^{n-4}+n.2^{n-3}+\\&+n.(1-n).2^{\frac{n-4}{2}}.\cos\left(\frac{(n-2)\pi}{4}\right)-n.2^{\frac{n-3}{2}}.\text{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right)\end{aligned}}$$

Exercício 3.9

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1).C_n^k = \sum_{k=0}^{n}k.C_n^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{n}C_n^k}_{2^n}$$

Do exercício 3.7 (Resultado 7.3.7.a), sabemos que:

$$n.x.(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}k.(x)^k.C_n^k$$

Fazendo $x = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n}k.C_n^k = n.2^{n-1}$$

Finalmente, temos:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(k+1).C_n^k = n.2^{n-1} + 2^n}$$

(Resultado 7.3.3)

Exercício 3.10

$$\sum_{k=1,5,9,\ldots}(k+1).C_n^k = \sum_{k=1,5,9,\ldots}k.C_n^k + \sum_{k=1,5,9,\ldots}C_n^k$$

O exercício pede agora um somatório de termos com k variando em ciclos de 4. Devemos, então, proceder como fizemos no exercício 3.8. Dessa vez temos que achar dois somatórios! Um deles já foi determinado na parte teórica do capítulo 3 (seção 1), no Resultado 3.1.6:

$$\sum_{k=1,5,9,\ldots}C_n^k = C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \ldots = 2^{n-2} + (2)^{(n-2)/2}.\text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Para achar o outro somatório, usaremos o resultado da questão 3.7:

$$n.x.(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}k.(x)^k.C_n^k$$

Fazendo $x = -1$ temos:

$$\sum_{k=0}^{n}k.(-1)^k.C_n^k = n.(-1).(1-1)^{n-1} = 0$$

Essa relação é válida para n > 1, uma vez que pra n = 1 teríamos uma indeterminação do tipo 0^0 na expressão anterior.

Então para n > 1 temos:

$$\begin{cases} C_n^1 + 2.C_n^2 + 3.C_n^3 + \ldots = n.2^{n-1} \\ -C_n^1 + 2.C_n^2 - 3.C_n^3 + - \ldots = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad C_n^1 + 3.C_n^3 + 5.C_n^5 + \ldots = n.2^{n-2} \quad \text{(I)}$$

Fazendo $x = i$ no Resultado 7.3.7.a, temos:

$$\sum_{k=0}^{n}k.(i)^k.C_n^k = n.(i).(1+i)^{n-1} = n.\left(\text{cis}\frac{\pi}{2}\right).\left(2^{\frac{n-1}{2}}\text{cis}\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right)\right)$$

$$= n.2^{\frac{n-1}{2}}.\text{cis}\left(\frac{(n-1)\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$$

E, além disso:

$$\sum_{k=0}^{n}k.(i)^k.C_n^k = i.C_n^1 - 2.C_n^2 - 3.i.C_n^3 + 4.C_n^4 - \ldots .$$

Segue, então:

$$C_n^1 - 3.C_n^3 + 5.C_n^5 - 7.C_n^7 + \ldots = \text{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}k.(i)^k.C_n^k\right)$$

$$= n.2^{\frac{n-1}{2}}.\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{(n-1)\pi}{4}\right) = n.2^{\frac{n-1}{2}}.\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right) \quad \text{(II)}$$

Temos em mãos, agora, as seguintes relações:

$$\begin{cases} C_n^1 + 3.C_n^3 + 5.C_n^5 + \ldots = n.2^{n-2} & \text{(De I)} \\ C_n^1 - 3.C_n^3 + 5.C_n^5 - 7.C_n^7 + \ldots = n.2^{\frac{n-1}{2}}.\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right) & \text{(De II)} \end{cases}$$

De onde, segue:

$$\underbrace{C_n^1 + 5.C_n^5 + 9.C_n^9 + \ldots}_{\sum_{k=1,5,9,\ldots}k.C_n^k} = n.2^{n-3} + n.2^{\frac{n-3}{2}}.\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right)$$

Finalmente, a resposta do problema:

$$\boxed{\sum_{k=1,5,9,\ldots}(k+1)C_n^k = n.2^{n-3} + n.2^{\frac{n-3}{2}}.\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right) + 2^{n-2} + 2^{(n-2)/2}.\text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$$

(Resultado 7.3.10)

Exercício 3.11 $\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}$

Vamos utilizar o desenvolvimento do binômio de Newton.

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}(x)^k.C_n^k$$

Integrando (ver apêndice) em ambos os lados com respeito a x, num intervalo finito de 0 a x:

$$\int_0^x(1+x)^n.dx=\int_0^x\left(C_n^0+C_n^1.x+C_n^2.x^2+...+C_n^n.x^n\right).dx$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x=\left.C_n^0.x+\frac{C_n^1.x^2}{2}+\frac{C_n^2.x^3}{3}+...+\frac{C_n^n.x^{n+1}}{n+1}\right]_0^x$$

$$\therefore \boxed{\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}-\frac{(1+0)^{n+1}}{n+1}=C_n^0.x+\frac{C_n^1.x^2}{2}+\frac{C_n^2.x^3}{3}+...+\frac{C_n^n.x^{n+1}}{n+1}}$$

(Resultado 7.3.11.a)

Fazendo $x=1$ na expressão acima, temos:

$$\boxed{\frac{C_n^0}{1}+\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{3}+...+\frac{C_n^n}{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$$

(Resultado 7.3.11.b)

Exercício 3.12 $\sum_{k=0,4,8,...}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}$

Vamos partir da expressão encontrada no exercício anterior (Resultado 7.3.11.a):

$$\frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}=C_n^0.x+\frac{C_n^1.x^2}{2}+\frac{C_n^2.x^3}{3}+...+\frac{C_n^n.x^{n+1}}{n+1}$$

Fazendo $x=-1$ na expressão acima, temos:

$$\frac{(1-1)^{n+1}-1}{n+1}=C_n^0.(-1)+\frac{C_n^1.(-1)^2}{2}+\frac{C_n^2.(-1)^3}{3}+...+\frac{C_n^n.(-1)^{n+1}}{n+1}$$

Juntando esse resultado ao resultado do exercício anterior (Resultado 7.3.11), temos as duas expressões em mãos:

$$\begin{cases}-C_n^0+\frac{C_n^1}{2}-\frac{C_n^2}{3}+-...+\frac{C_n^n.(-1)^{n+1}}{n+1}=-\frac{1}{n+1} & \text{(I)}\\ C_n^0+\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{3}+...+\frac{C_n^n}{n+1}=\frac{2^n-1}{n+1} & \text{(II)}\end{cases}$$

Fazendo $\frac{(II)-(I)}{2}$:

$$\frac{C_n^0}{1}+\frac{C_n^2}{3}+\frac{C_n^4}{5}+...=\frac{2^n}{n+1} \quad \text{(III)}$$

Voltando ao Resultado 7.3.11, e fazendo $x=i$:

$$\frac{(1+i)^{n+1}-1}{n+1}=C_n^0.i+\frac{C_n^1.i^2}{2}+\frac{C_n^2.i^3}{3}+...+\frac{C_n^n.i^{n+1}}{n+1}$$
$$=\left(-\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^3}{4}-\frac{C_n^5}{6}+-...\right)+\left(\frac{C_n^0}{1}-\frac{C_n^2}{3}+\frac{C_n^4}{5}-+...\right).i$$

$$\therefore \frac{C_n^0}{1}-\frac{C_n^2}{3}+\frac{C_n^4}{5}-+...=\text{Im}\left(\frac{(1+i)^{n+1}-1}{n+1}\right) \quad \text{(IV)}$$

Temos em mãos, agora, duas importantes expressões:

$$\begin{cases}\text{(De III)}: & \frac{C_n^0}{1}+\frac{C_n^2}{3}+\frac{C_n^4}{5}+...=\frac{2^n}{n+1}\\ \text{(De IV)}: & \frac{C_n^0}{1}-\frac{C_n^2}{3}+\frac{C_n^4}{5}-+...=\text{Im}\left(\frac{(1+i)^{n+1}-1}{n+1}\right)\end{cases}$$

$$\therefore \sum_{k=0,4,8,...}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{2^n}{n+1}+\text{Im}\left(\frac{(1+i)^{n+1}-1}{n+1}\right)\right)$$

Lembrando que:

$$\frac{(1+i)^{n+1}-1}{n+1}=\frac{2^{\frac{n+1}{2}}.cis\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)-1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \ Im\left(\frac{(1+i)^{n+1}-1}{n+1}\right)=\frac{2^{\frac{n+1}{2}}.sen\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)}{n+1}$$

Podemos escrever a resposta final do problema:

$$\boxed{\sum_{k=0,4,8,...}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{2^{n-1}+2^{\frac{n-1}{2}}.sen\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)}{n+1}}$$

Exercício 3.13

No exemplo 3.2.a, mostramos que:

$$A = cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)+cis\left(2.\frac{2\pi}{n}\right)+cis\left(3.\frac{2\pi}{n}\right)+...+cis\left((n-1).\frac{2\pi}{n}\right)=-1$$

A soma pedida é justamente a parte real de A, que vale −1.

Exercício 3.14

Vamos analisar a soma:

$$S = cis(x)+cis(2x)+cis(3x)+...+cis(nx)$$

Para $z = cis(x)$ a soma torna-se, pela Lei de De Moivre:

$$S = z+z^2+z^3+...+z^n = z.\left(\frac{z^n-1}{z-1}\right)$$

$$=(cisx).\left(\frac{(cisx)^n-1}{(cisx)-1}\right)=(cisx).\left(\frac{cis(nx)-1}{(cisx)-1}\right)$$

Utilizaremos as seguintes transformações trigonométricas:

$$\begin{cases}\cos\theta-1=-2.sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ sen\theta=2.sen\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{cases}$$

Temos então:

$$S=(cisx).\left(\frac{(\cos(nx)-1)+i.sen(nx)}{(\cos x-1)+i.senx}\right)=$$

$$=(cisx).\left(\frac{-2.sen^2\left(\frac{nx}{2}\right)+i.2.sen\left(\frac{nx}{2}\right).\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2.sen^2\left(\frac{x}{2}\right)+i.2.sen\left(\frac{nx}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=$$

$$=(cisx).\left(\frac{sen\left(\frac{nx}{2}\right)\left(-sen\left(\frac{nx}{2}\right)+i.\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\right)}{sen\left(\frac{x}{2}\right)\left(-sen\left(\frac{x}{2}\right)+i.\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right)$$

Multiplicando no denominador e numerador por −i, não alteramos a expressão de S:

$$S=(cisx).\left(\frac{sen\left(\frac{nx}{2}\right)\left(i.sen\left(\frac{nx}{2}\right)+\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\right)}{sen\left(\frac{x}{2}\right)\left(i.sen\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right)$$

$$S=(cisx).\left(\frac{sen\left(\frac{nx}{2}\right)\left(cis\left(\frac{nx}{2}\right)\right)}{sen\left(\frac{x}{2}\right)\left(cis\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right)$$

$$=\left(cis\left(x-\frac{x}{2}+\frac{nx}{2}\right)\right).\left(\frac{sen\left(\frac{nx}{2}\right)}{sen\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

$$=\left(cis\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\right).\left(\frac{sen\left(\frac{nx}{2}\right)}{sen\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

A soma original pedida é justamente a parte real de S, ou seja:

$$\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)+...+\cos(nx)=\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right).\left(\frac{sen\left(\frac{nx}{2}\right)}{sen\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

A soma pedida é justamente a parte imaginária de S. Ou seja:

$$\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(2x)+\operatorname{sen}(3x)+\ldots+\operatorname{sen}(nx)=\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

Exercício 3.15

Do enunciado:

$$z=\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{2}.\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\text{a}$$

Calculando o pedido, observando a seqüência em PG:

$$\left|\sum_{k=1}^{60} z^k\right| = \left|z+z^2+z^3+\ldots+z^{60}\right| = \left|z.\left(\frac{z^{60}-1}{z-1}\right)\right| = |z|.\frac{\left|z^{60}-1\right|}{|z-1|}$$

$$=1.\frac{\left|\operatorname{cis}\left(60.\frac{\pi}{4}\right)-1\right|}{\left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1\right|}=\frac{\left|\operatorname{cis}(15\pi)-1\right|}{\left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)+i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}$$

$$=\frac{|-1-1|}{\left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2+i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{2}+1+\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\sqrt{4+2\sqrt{2}} \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{60} z^k\right|=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

Exercício 3.16

Os vetores da soma da questão anterior estão indicados na seguinte figura 3.16, com ângulos de 45º entre cada um e seu consecutivo. Seja S a soma pedida:

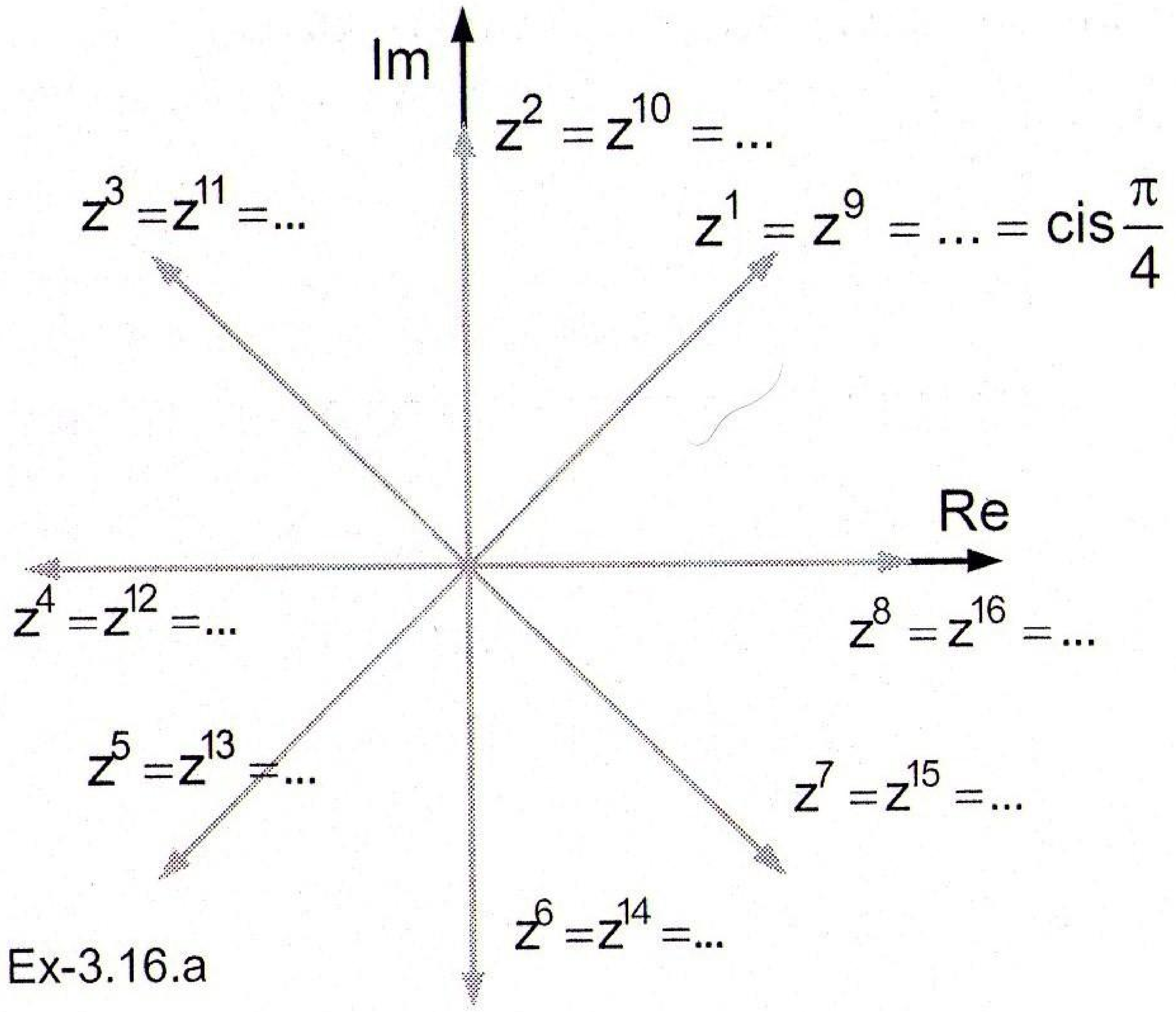


Fig. Ex-3.16.a

Note que cada volta de vetores é completada com 8 vetores. Portanto a última volta da soma é completada no vetor z^{56}.

A cada volta, a soma dos vetores é nula, pois vetores de sentido contrário e mesmo módulo e direção se anulam. Portanto os primeiros 56 termos da soma se anulam. Restam-nos os seguintes vetores após esse cancelamento:

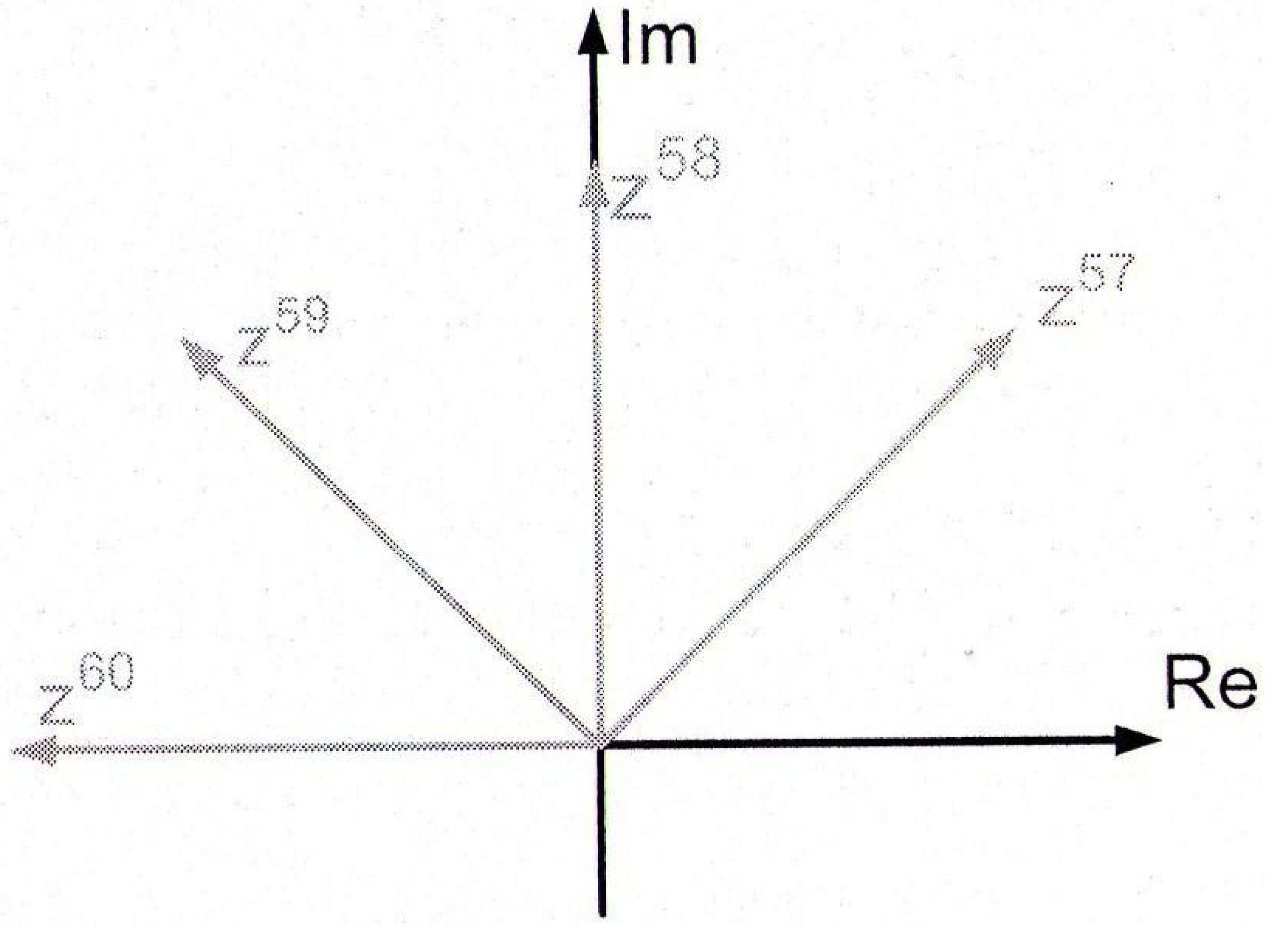


Fig. Ex-3.16.b

Usando a regra do paralelogramo, vamos somar os vetores por partes, afim de achar o vetor soma S:

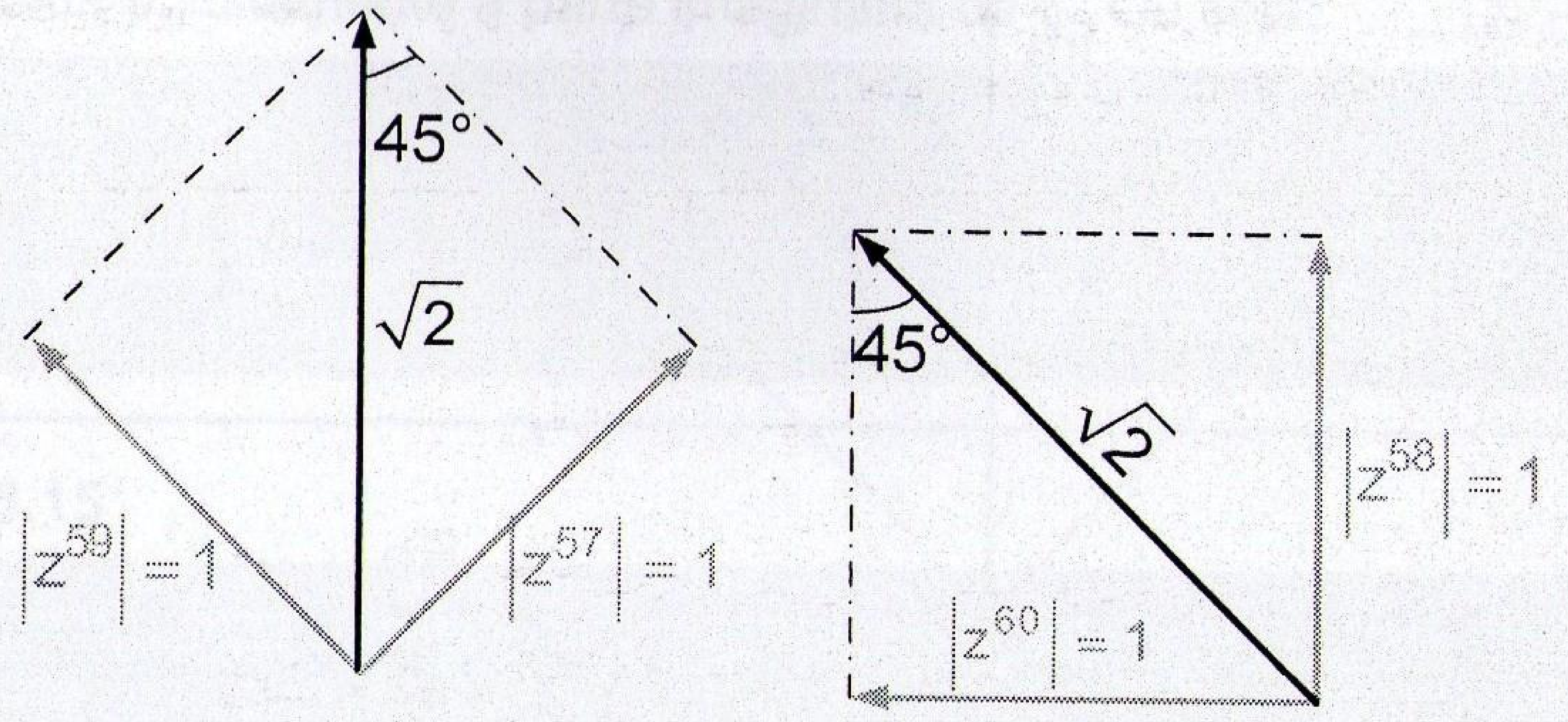


Fig. Ex-3.16.c

Analisando a soma final:

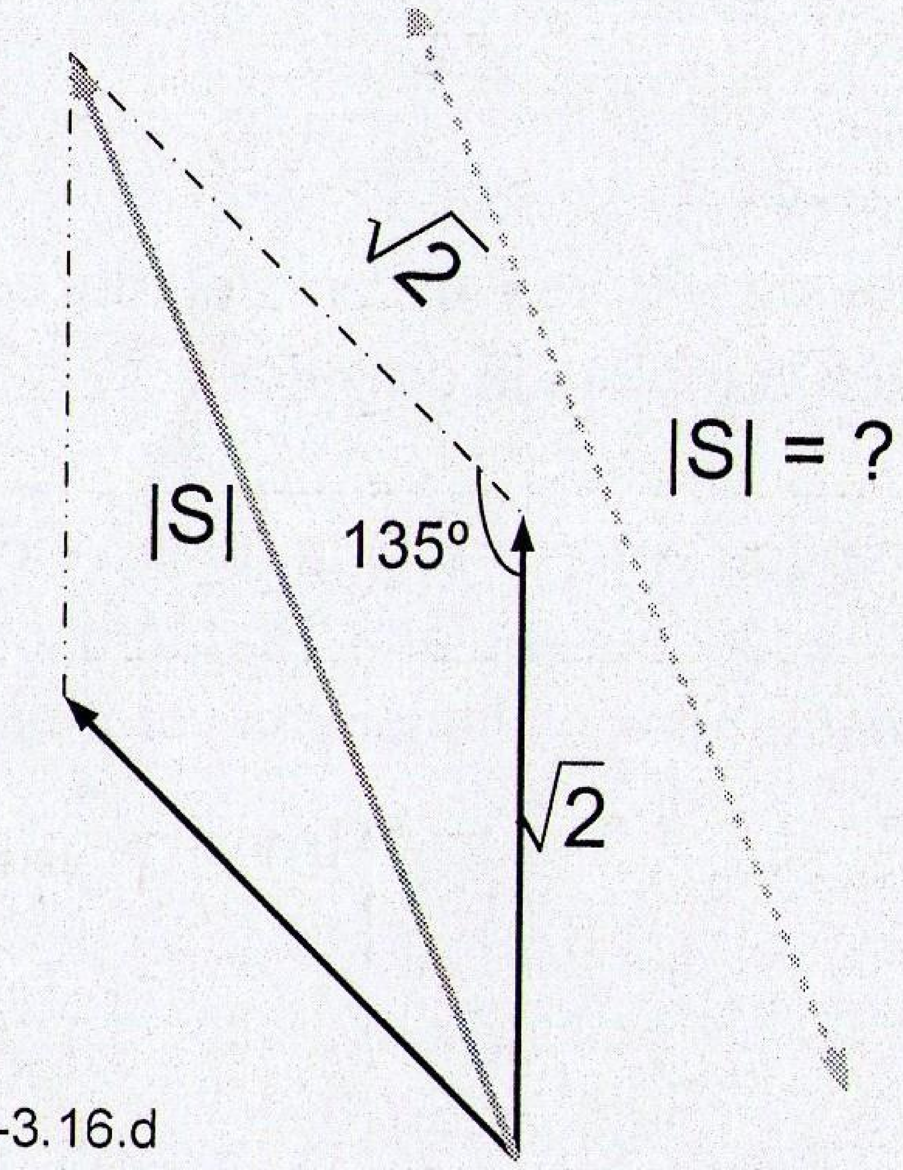


Fig. Ex-3.16.d

Da lei dos cossenos:

$$|S| = \left|z + z^2 + \ldots + z^{60}\right|^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 - 2.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\cos\left(135^0\right)$$

$$= 4 - 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 4 + 2.\sqrt{2}$$

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{60} z^k\right| = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}$$

Conforme o que foi encontrado na questão anterior, há consistência na interpretação geométrica do problema.

Exercício 3.17

Vamos nos referir à soma abaixo pela letra S:

$$S = 1 + 2i + 3.i^2 + 4.i^3 + \ldots + 2004.i^{2003}$$

Desta forma:

$$S = 1 + 2i + 3.i^2 + 4.i^3 + \ldots + 2004.i^{2003}$$

$$i.S = \quad i + 2.i^2 + 3.i^3 + \ldots + 2003.i^{2003} + 2004.i^{2004}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira:

$$S - i.S = 1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2003} - 2004.i^{2004}$$

$$= \frac{i^{2004} - 1}{i - 1} - 2004.i^{2004} = \frac{1-1}{i-1} - 2004.1$$

$$\Rightarrow S(1-i) = -2004$$

$$\Rightarrow S = \frac{2004}{i-1} = \frac{2004(-i-1)}{2} = -1002(1+i)$$

$$\boxed{\operatorname{Im}\left(1 + 2i + 3.i^2 + 4.i^3 + \ldots + 2004.i^{2003}\right) = -1002}$$

Exercício 3.18 Do exemplo resolvido 3.2.c, temos:

$$\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)\right) \ldots \left(1 - \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right) = \frac{n^2}{2^{n-1}}$$

Da trigonometria, sabemos que:

$$(1 - \cos\theta) = 2.\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Usando esse resultado, segue:

$$\left(2\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\left(2\text{sen}^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\left(2\text{sen}^2\left(\frac{3\pi}{n}\right)\right) \ldots \left(2\text{sen}^2\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right) = \frac{n^2}{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \left(\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\left(\text{sen}^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\left(\text{sen}^2\left(\frac{3\pi}{n}\right)\right) \ldots \left(\text{sen}^2\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right) = \frac{n^2}{2^{2(n-1)}}$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros da equação:

$$\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{n}\right)\right)\ldots\left(\operatorname{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right)=\frac{n}{2^{(n-1)}}$$

Exercício 3.19

$$(x+y.i)^3 = x^3+3.x^2.y.i+3.x.y^2.i^2+y^3.i^3$$
$$=\underbrace{(x^3-3xy^2)}_{=1}+\underbrace{(3x^2y-y^3)}_{=1}.i = 1+i$$

$$\therefore\ z^3 = 1+i \Rightarrow |z| = \sqrt[6]{2}$$

Exercício 3.20

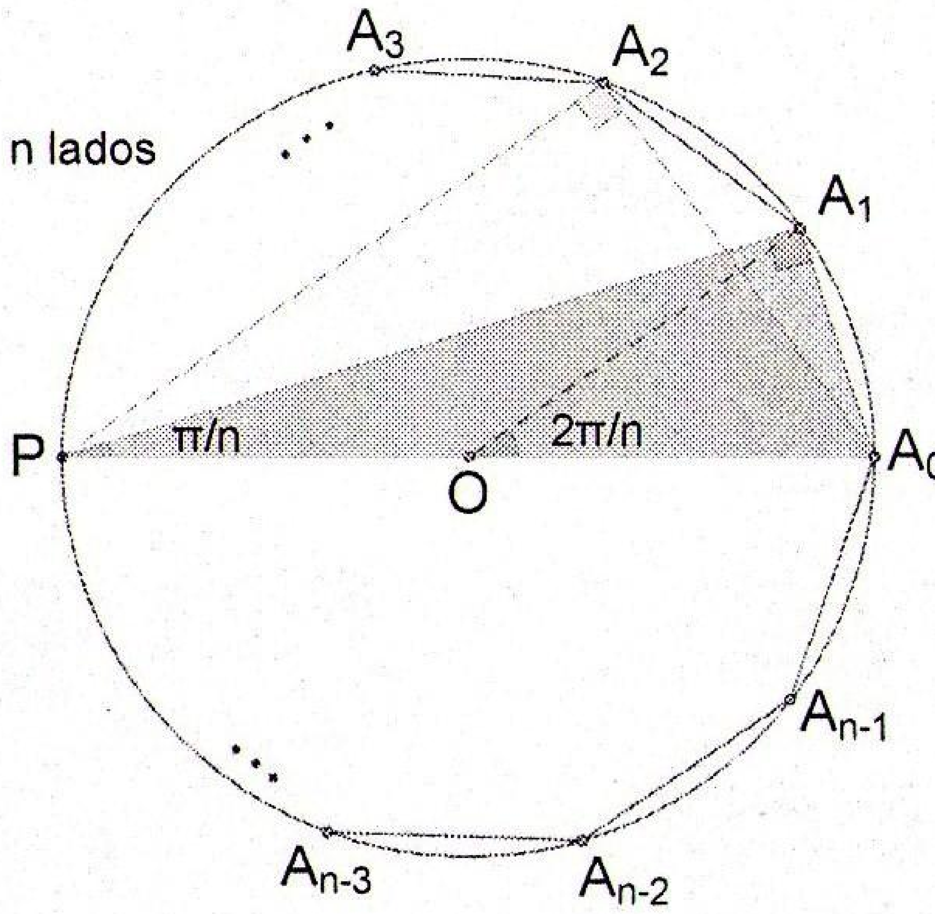


Fig. Ex-3.20

(Polígono regular de n lados inscrito numa circunferência de raio unitário)

Argumentos Geométricos:

i) Da geometria temos que os ângulos centrais $\measuredangle A_kOA_0$ serão sempre o dobro dos ângulos $\measuredangle A_kPA_0$

ii) Como $\overline{A_0P}$ é diâmetro, temos que os ângulos: $\measuredangle PA_kA_0$ serão sempre retos.

Logo:

$$\begin{cases} A_0A_1 = 2R.\operatorname{sen}(\pi/n) \\ A_0A_2 = 2R.\operatorname{sen}(2\pi/n) \\ A_0A_3 = 2R.\operatorname{sen}(3\pi/n) \\ \ldots \\ A_0A_{n-1} = 2R.\operatorname{sen}((n-1)\pi/n) \end{cases}$$

Multiplicando as equações (lembrando que R = 1, e que, do Ex. 2.8, o produto $(A_0A_1).(A_0A_2).....(A_0A_{n-1})$ vale n), teremos:

$$(A_0A_1).(A_0A_2).....(A_0A_{n-1}) = 2^{n-1}.R^{n-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\ldots\left(\operatorname{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right)$$

$$\Rightarrow n = 2^{n-1}.1^{n-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right).\left(\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\ldots\left(\operatorname{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right)$$

$$\therefore \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right).\left(\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\ldots\left(\operatorname{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Soluções – Capítulo 4

Exercício 4.1

Sabemos que, se 2 + i é raiz, então seu conjugado 2 – i também será (Resultado 4.4.1). Desta forma, P(x) será divisível por:

$$(x-(2+i))(x-(2-i)) = x^2-4x+5$$

Façamos então a divisão algébrica:

$$\begin{array}{l|l} x^4 + x^3 + p.x^2 + x + q & x^2-4x+5 \\ \underline{-x^4+4.x^3-5.x^2} & x^2+5x+(p+15) \\ 5x^3+(p-5).x^2+x+q & \\ \underline{-5x^3+20.x^2+\ -25.x} & \\ (p+15)x^2-24x+q & \\ \underline{-(p+15)x^2+(4p+60)x-(5p+75)} & \\ (4p+36).x+(q-5p-75) & \end{array}$$

Como P(x) é divisível por x^2-4x+5, o resto da divisão acima deve ser identicamente nulo.

$$\begin{cases} 4p+36=0 \\ q-5p-75=0 \end{cases} \Leftrightarrow\ p=-9\ ;\ q=30$$

As outras raízes de P(x) serão raízes do quociente da divisão. Ou seja, serão raízes de: x^2+5x+6. De onde segue que as raízes de P(x) serão:

$$-2,\ -3,\ 2+i,\ 2-i$$

Exercício 4.2 Chamemos de x a expressão a ser analisada:

$$x = \underbrace{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}_{A} + \underbrace{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}_{B}$$

Elevando a expressão ao cubo:

$$x^3 = (A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3.A^2B + 3A.B^2 = A^3 + B^3 + 3.A.B.\underbrace{(A+B)}_{x}$$

$$= A^3 + B^3 + 3.A.B.x = \left(2+\sqrt{5}\right) + \left(2-\sqrt{5}\right) + 3.x.\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right).\left(2-\sqrt{5}\right)}$$

$$= 4 + 3.x.\sqrt[3]{-1} = 4 - 3x$$

Ou seja, x é tal que:

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

Por inspeção, 1 é raiz do polinômio acima, que reduzido por Briot-Ruffini fica:

$$(x-1).\left(x^2 + x + 4\right) = 0$$

As demais raízes serão as raízes de $x^2 + x + 4$, que são complexas! Como os radicais são números reais, segue que:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1 \in \mathbb{Q}$$

Exercício 4.3
A primeira divisão é exata, portanto o resto da divisão algébrica deverá ser identicamente nulo.

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + a.x^2 + b & x^2 + 2x + 4 \\ \cline{2-2}
-x^4 - 2.x^3 - 4.x^2 & x^2 - 2.x + a \\ \cline{1-1}
\quad -2.x^3 + (a-4).x^2 + b & \\
\quad 2.x^3 + 4.x^2 + 8x & \\ \cline{1-1}
\qquad a.x^2 + 8x + b & \\
\qquad -a.x^2 - 2.a.x - 4.a & \\ \cline{1-1}
\qquad (8-2.a).x + (b-4a) \equiv 0.x + 0 &
\end{array}$$

$$\therefore \quad a = 4 \; ; \; b = 16$$

Da mesma forma, devemos igualar o resto da segunda divisão a −5.

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + c.x^2 + dx - 3 & x^2 - x + 2 \\ \cline{2-2}
-x^3 + x^2 - 2x & x + (c+1) \\ \cline{1-1}
(c+1).x^2 + (d-2).x - 3 & \\
-(c+1).x^2 + (c+1).x - 2.(c+1) & \\ \cline{1-1}
\quad (c+d-1).x + (-5-2.c) \equiv 0.x - 5 &
\end{array}$$

$$\therefore \quad c = 0 \; ; \; d = 1$$

Com isso:

$$\boxed{a + b + c + d = 21}$$

Exercício 4.4 As raízes de D(x) são tais que:

$$\begin{cases} x^4 = 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x = -1, \; -i, \; +i$$

Do enunciado: $P(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n+1}$

Note que P(x) é uma soma de uma P.G. de razão x:

$$P(x) = \frac{x^{2n+2} - 1}{x - 1}$$

Como o divisor é do 3º grau, o resto R(x) será no máximo do 2º grau. Sendo assim, a divisão pode ser expressa da seguinte maneira:

$$P(x) = \frac{(x^2)^{n+1} - 1}{x - 1} = (x+1).(x-i).(x+i).Q(x) + \underbrace{a.x^2 + b.x + c}_{R(x)}$$

(Eq. I)

Fazendo x = −1 na equação I:

$$\frac{((-1)^2)^{n+1} - 1}{-1-1} = 0.\cancel{Q(-1)} + a.(-1)^2 + b.(-1) + c \quad \Rightarrow \quad a - b + c = 0 \;\; \textbf{(i)}$$

Fazendo x = i na equação I:

$$\frac{(i^2)^{n+1}-1}{i-1} = \cancel{0.Q(i)} + a.(i)^2 + b.(i) + c$$

$$\Rightarrow \frac{(-1)^{n+1}-1}{(i-1).(-1-i)}.(-1-i) = -a + b.i + c$$

$$\Rightarrow \left((-1)^{n+2}+1\right).\frac{(1+i)}{2} = -a + b.i + c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n+2}+1}{2} = -a + c \\ \dfrac{(-1)^{n+2}+1}{2} = b \end{cases}$$

(ii)

Fazendo x = - i na equação I:

$$\frac{((-i)^2)^{n+1}-1}{-i-1} = \cancel{0.Q(x)} + a.(-i)^2 + b.(-i) + c$$

$$\Rightarrow \frac{(-1)^{n+1}-1}{(-i-1).(-1+i)}.(-1+i) = -a - b.i + c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n+2}+1}{2} = -a + c \\ \dfrac{-(-1)^{n+2}-1}{2} = -b \end{cases}$$

(iii)

O resultado de (ii) e (iii) são iguais! Juntando os resultados das equações (i), (ii) e (iii) nos dão o sistema:

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ \dfrac{(-1)^{n+2}+1}{2} = -a + c \\ \dfrac{-(-1)^{n+2}-1}{2} = -b \end{cases}$$

Separemos em dois casos (n par ou n ímpar).
Para <u>n ímpar</u>:

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ \dfrac{-1+1}{2} = -a + c \\ \dfrac{1-1}{2} = -b \end{cases} \quad \therefore \quad a = c = b = 0 \quad \therefore \quad R(x) = 0$$

<u>Para n par</u>:

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ \dfrac{1+1}{2} = -a + c \\ \dfrac{-1-1}{2} = -b \end{cases} \quad \therefore \quad a = 0\ ;\ b = c = 1 \quad \therefore \quad R(x) = x + 1$$

Portanto, o valor de R(x) será:

$$\boxed{R(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{se n é ímpar} \\ x+1\ , & \text{se n é par} \end{cases}}$$

Exercício 4.5 Sendo k a raiz da segunda equação podemos escrever:

$$\begin{cases} (3k)^3 - 7.(3k)^2 - 204(3k) + 1260 = 0 \\ k^3 - 15.k^2 - 394k + 840 = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 3, dividindo a primeira por 9 e arrumando o sistema chegamos a:

$$\begin{cases} 3.k^3 - 7.k^2 - 68k + 140 = 0 \\ 3.k^3 - 45.k^2 - 1182k + 2520 = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira:

$$38.k^2 + 1114.k - 2380 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 2 \text{ ou } -\frac{595}{19}$$

Testando as raízes, temos que a raiz é k = 2. Com isso, utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini, podemos fatorar os dois polinômios originais:

$$\begin{cases} x^3 - 7.x^2 - 204x + 1260 = (x-6).(x+14).(x-15) = 0 \\ x^3 - 15.x^2 - 394x + 840 = (x-2).(x-28).(x+15) = 0 \end{cases}$$

Temos então as soluções das duas equações, respectivamente:

$$\boxed{x = \{6, -14, 15\} \quad ; \quad x = \{2, 28, -15\}}$$

Exercício 4.6

Sejam as raízes em PA dadas por: $a-3r$, $a-r$, $a+r$, $a+3r$

Pelas relações de Girard, podemos escrever:

$$\begin{cases} S_G^1 = (a-3r)+(a-r)+(a+r)+(a+3r) = 0 \\ S_G^2 = (a-3r).(a-r)+(a-3r).(a+r)+(a-3r).(a+3r)+ \\ \quad +(a-r).(a+r).+(a-r).(a+3r)+(a+r).(a+3r) = -(3m+5) \\ S_G^3 = (a-3r).(a-r).(a+r)+(a-3r).(a-r).(a+3r)+ \\ \quad +(a-3r).(a+r).(a+3r)+(a-r).(a+r).(a+3r) = 0 \\ S_G^4 = (a-3r).(a-r).(a+r).(a+3r) = (m+1)^2 \end{cases}$$

De onde seguem os resultados:

$$\begin{cases} a = 0 \\ (-3r).(-r)+(-3r).(r)+(-3r).(3r)+(-r).(r)+(-r).(3r)+(r).(3r) = -(3m+5) \\ (-3r).(-r).(r)+(-3r).(-r).(3r)+(-3r).(r).(3r)+(-r).(r).(3r) = 0 \\ (-3r).(-r).(r).(3r) = (m+1)^2 \end{cases}$$

Arrumando: $\begin{cases} a = 0 \\ 10.r^2 = 3m+5 \\ r^4 = ((m+1)/3)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = (3m+5)/10 \\ r^2 = \pm((m+1)/3) \end{cases}$

Logo: $\dfrac{3m+5}{10} = \pm\dfrac{m+1}{3} \quad \therefore \quad \begin{cases} m = 5 \\ m = -\frac{25}{19} \end{cases}$

Exercício 4.7 As verificações feitas após o resultado 4.4.1 mostram que as relações de Girard são válidas para os casos iniciais n = 2 e n = 3. Utilizando o processo de indução finita, devemos mostrar que pra todo n natural maior que os casos iniciais, também vale que:

$$a_n.\left(x^n - S_G^1.x^{n-1} + S_G^2.x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}.S_G^{n-1}.x + (-1)^n.S_G^n\right) \equiv$$
$$\equiv a_n.(x-\alpha_1).(x-\alpha_2)\ldots.(x-\alpha_n)$$

Suponhamos que as Relações de Girard valham para n = k.

$$a_k.\left(x^k - S_G^1.x^{k-1} + S_G^2.x^{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1}.S_G^{k-1}.x + (-1)^k.S_G^k\right) \equiv$$
$$\equiv a_k.(x-\alpha_1).(x-\alpha_2)\ldots.(x-\alpha_k)$$

Verifiquemos a validade para n = k + 1.

$$a_k.(x-\alpha_1).(x-\alpha_2)\ldots.(x-\alpha_k).(x-\alpha_{k+1}) \equiv$$
$$\equiv a_k.\left(x^k - S_G^1.x^{k-1} + S_G^2.x^{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1}.S_G^{k-1}.x + (-1)^k.S_G^k\right).(x-\alpha_{k+1}) \equiv$$
$$\equiv a_k.\left(x^{k+1} - \left(\alpha_{k+1} + S_G^1\right).x^k + \left(\alpha_{k+1}.S_G^1 + S_G^2\right).x^{k-1} + \ldots + (-1)^{k+1}.\left(\alpha_{k+1}.S_G^k\right)\right)$$

Note que os novos coeficientes tornam-se exatamente os novos coeficientes de Girard:

$$a_k.(x-\alpha_1).(x-\alpha_2)\ldots.(x-\alpha_k).(x-\alpha_{k+1}) \equiv$$
$$\equiv a_k.\left(x^{k+1} - S_{G,k+1}^1.x^k + S_{G,k+1}^2.x^{k-1} + \ldots + (-1)^{k-1}.S_{G,k+1}^k.x + (-1)^k.S_{G,k+1}^{k-1}\right)$$

Ou seja, é válido para n = k + 1. Por indução, as relações de Girard valem para polinômios de grau n natural qualquer.

Exercício 4.8

$$x^5 - 3.x^4 - 3.x^3 + 27.x^2 - 44.x + 30$$

Como P(x) admite 2 raízes complexas distintas (pelo menos), temos que seus conjugados também serão raízes (Teorema 4.4.1). Logo, as raízes serão do tipo:

$$z\,,\ \bar{z}\,,\ w\,,\ \bar{w}\,,\ u$$

Calculando o produto das raízes (Relação de Girard):

$$(z.w).(\bar{z}.\bar{w}).u = (z.w).\overline{(z.w)}.u = (3-i).(3+i).u = -30$$
$$\therefore \quad u = -3$$

Então, sabendo que -3 é raiz, podemos reduzir o grau do polinômio original a fim de determinar as demais raízes.

	1	-3	-3	27	-44	30
-3	1	-6	15	-18	10	0

As demais raízes serão raízes, então, de:

$$x^4 - 6.x^3 + 15.x^2 - 18.x + 10 = 0$$

Sabemos que as raízes z, $\bar{z}$, w, $\bar{w}$ têm parte real inteira e parte imaginária inteira. É correto dizer que, existem a, b, c, d inteiros tais que:

$$x^4 - 6.x^3 + 15.x^2 - 18.x + 10 \equiv (x - a - bi).(x - a + bi).(x - c - di).(x - c + di)$$
$$\equiv (x^2 - 2ax + a^2 + b^2).(x^2 - 2cx + c^2 + d^2)$$

Como $-2a$, $a^2 + b^2$, $-2c$, $c^2 + d^2$ são inteiros, podemos nos referir a eles pelos, também inteiros, m, n, p, q, respectivamente. De tal forma que devemos achar os valores de m, n, p, q que satisfazem à identidade:

$$x^4 - 6.x^3 + 15.x^2 - 18.x + 10 \equiv (x^2 + mx + n).(x^2 + p.x + q)$$
$$\equiv x^4 + (p + m).x^3 + (q + m.p + n).x^2 + (m.q + n.p).x + n.q$$

Da identidade, segue o seguinte sistema (do qual só nos interessam as soluções inteiras):

$$\begin{cases} p + m = -6 \\ q + mp + n = 15 \\ mq + np = -18 \\ nq = 10 \end{cases}$$

Da última equação do sistema acima, como n e q são inteiros, ambos devem dividir 10, de tal forma que temos 4 opções a analisar:

$$(i)\ n = 5\ ,\ q = 2\ ;\ (ii)\ n = -5\ ,\ q = -2\ ;$$
$$(iii)\ n = 10\ ,\ q = 1\ ;\ (iv)\ n = -10\ ,\ q = -1$$

Em (i):

$$\begin{cases} p + m = -6 \\ m.p = 8 \\ 2m + 5p = -18 \end{cases} \Rightarrow m = -4\ ,\ p = -2$$

Em (ii):

$$\begin{cases} p + m = -6 \\ m.p = 22 \\ -2m - 5p = -18 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \text{não há soluções inteiras}$$

Em (iii):

$$\begin{cases} p + m = -6 \\ m.p = 4 \\ 10p + m = -18 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \text{não há soluções inteiras}$$

Em (iv):

$$\begin{cases} p + m = -6 \\ m.p = 26 \\ -10p - m = -18 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \text{não há soluções inteiras}$$

Portanto, a única possibilidade veio do caso (i), no qual temos que as outras quatro raízes vêm de:

$$(x^2 + mx + n).(x^2 + p.x + q) \equiv (x^2 - 4x + 5).(x^2 - 2.x + 2)$$

Resolvendo as duas equações do segundo grau, determinamos as outras quatro raízes do polinômio original, de tal forma que temos agora todas suas raízes:

$$2 \pm i\ ,\ 1 \pm i\ ,\ -3$$

Exercício 4.9

Calculemos algumas somas que nos serão úteis:

$$\begin{cases} S_2^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ \quad = (a + b + c + d)^2 - 2.(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \\ \quad = \left(S_G^1\right)^2 - 2.\left(S_G^2\right) = \dfrac{64}{m^2} + \dfrac{278}{m} \\ S_1^* = a + b + c + d = S_G^1 = -\dfrac{8}{m} \\ S_0^* = a^0 + b^0 + c^0 + d^0 = 4 \\ S_{-1}^* = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} = \dfrac{bcd + abd + acd + abc}{abcd} = \dfrac{S_G^3}{S_G^4} = \dfrac{18/m}{9/m} = 2 \end{cases}$$

Utilizemos o Resultado da Soma de Newton (Resultado 4.5.1), começando com S_2^*:

$$m.(S_2^*) + 8.(S_1^*) - 139.(S_0^*) - 18.(S_{-1}^*) + 9.(S_{-2}^*) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{64}{m} + 278 - \frac{64}{m} - 139.4 - 18.2 + 9.(S_{-2}^*) = 0$$
$$\Rightarrow (S_{-2}^*) = 314/9$$

Utilizemos, agora, o Resultado da Soma de Newton, começando com S_1^*:

$$m.(S_1^*) + 8.(S_0^*) - 139.(S_{-1}^*) - 18.(S_{-2}^*) + 9.(S_{-3}^*) = 0$$
$$\Rightarrow -8 + 8.4 - 139.2 - 2.314 + 9.(S_{-3}^*) = 0$$
$$\Rightarrow (S_{-3}^*) = 98$$

Sem resolver a equação, calculamos que:

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} = S_{-3}^* = 98$$

Exercício 4.10 Sejam m, n, m+n, as raízes da equação. Das relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} m + n + (m + n) = S_G^1 = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \\ m.n.(m+n) = S_G^3 = -\frac{1}{36} \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} m + n = \frac{1}{6} \\ m.n = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Sabendo a soma e o produto de m e n, temos que m e n serão as raízes da equação:

$$\lambda^2 - \frac{\lambda}{6} - \frac{1}{6} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6.\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$
$$\therefore \quad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} = -\frac{1}{3} \text{ ou } \frac{1}{2}$$

Daí segue que as raízes serão:

$$\boxed{-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}}$$

Exercício 4.11 Como os coeficientes do polinômio são todos reais, pelo Teorema 4.4.1 teremos que as raízes serão do tipo: z, $\overline{z}$, w, $\overline{w}$.

As duas raízes que somam 3 + 4.i não podem ser conjugadas entre si, pois o resultado não é real. Portanto, sem perda de generalidade sejam elas z e w. Do enunciado:

Da relação de Girard:

$$b = S_G^2 = z.\overline{z} + w.\overline{w} + z.\overline{w} + \overline{z}.w + z.w + \overline{z.w}$$
$$= (z + w).(\overline{z} + \overline{w}) + z.w + \overline{zw}$$
$$= (z + w).(\overline{z + w}) + (zw + \overline{zw})$$
$$= (3 + 4i).(3 - 4i) + ((13 - i) + (13 + i))$$
$$= 25 + 26 = 51 \qquad \therefore \boxed{b = 51}$$

Exercício 4.12 Considere p(x) dado por:

$$p(x) = x^5 + a.x^4 + b.x^3 + c.x^2 + d.x + e$$

Sendo m,n,p,q as raízes pares e k a raiz impar, das relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} m + n + p + q + k = -a \\ m.n + m.p + m.q + m.k + n.p + n.q + n.k + p.q + p.k + q.k = b \\ m.n.p + m.n.q + m.n.k + m.p.q + m.p.k + m.q.k + n.p.q + n.p.k + n.q.k + p.q.k = -c \\ m.n.p.q + m.n.p.k + m.p.q.k + n.p.q.k + m.n.q.k = d \\ m.n.p.q.k = -e \end{cases}$$

Lembremos que o fator par em um produto torna-o par; a soma de um par com um ímpar resulta em um ímpar; e que a soma de um par com par resulta em um par. Como a partir da segunda equação todos os termos nas somas possuem sempre um fator par, teremos que b, c, d, e serão números pares! Como, na primeira equação, temos uma soma de 4 pares e um ímpar, o resultado é ímpar; ou seja, a é ímpar.

O polinômio p(x) possui 4 coeficientes pares

Exercício 4.13 Desenvolvendo o lado esquerdo da identidade:

$$(1 + x + x^2 + x^3)^2 \equiv (1 + x + x^2 + x^3).(1 + x + x^2 + x^3)$$
$$\equiv 1 + x + x^2 + x^3 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^2$$
$$+ x^3 + x^4 + x^5 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$
$$\equiv 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2.x^5 + x^6$$

Exercício 4.14 Utilizando uma fatoração semelhante à mostrada no Exercício 4.13, temos:

$$P(x) = x.\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{23}\right)^2 = x.\left(\frac{x^{24} - 1}{x - 1}\right)^2$$

Fica claro, agora, que as raízes de P(x) serão: 0, $cis\left(\frac{2.t\pi}{24}\right)$, $t = 1, 2, \ldots, 23$

Dessa forma:

$$|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n| =$$

$$= |Re(0^2)| + \left|Re\left(cis^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\right| + \left|Re\left(cis^2\left(\frac{2\pi}{12}\right)\right)\right| + \ldots + \left|Re\left(cis^2\left(\frac{23\pi}{12}\right)\right)\right|$$

$$= |Re(0^2)| + \left|Re\left(cis\left(2.\frac{\pi}{12}\right)\right)\right| + \left|Re\left(cis\left(2.\frac{2\pi}{12}\right)\right)\right| + \ldots + \left|Re\left(cis\left(2.\frac{23\pi}{12}\right)\right)\right|$$

$$= 0 + \left|Re\left(cis\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right| + \left|Re\left(cis\left(\frac{2\pi}{6}\right)\right)\right| + \left|Re\left(cis\left(\frac{3\pi}{6}\right)\right)\right| + \ldots + \left|Re\left(cis\left(\frac{23\pi}{6}\right)\right)\right|$$

$$= 0 + \left|\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| + \left|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| + \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right| + \ldots + \left|\cos\left(\frac{23\pi}{6}\right)\right|$$

$$= 0 + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1}_{\text{1 volta no circulo trigonométrico}} + \underbrace{\ldots + \frac{\sqrt{3}}{2}}_{\text{2a volta}}$$

$$= 7 + 4.\sqrt{3}$$

$$\boxed{|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n| = 7 + 4.\sqrt{3}}$$

Exercício 4.15 Chamemos o polinômio de P(x).

Para que seja divisível por x + a, devemos ter que (Resultado 4.3.1): $P(-a) = 0$

Com isso:

$$P(-a) = 2.(-a)^m + a^{3n}.(-a)^{m-3n} - a^m$$
$$= 2.(-1)^m.a^m + (-1)^{m-3n}.a^m - a^m$$
$$= a^m.\left(2.(-1)^m + (-1)^{m-3n} - 1\right) = 0$$

O sinal de cada parcela depende da paridade dos expoentes. Portanto, para esta análise, vamos abrir os quatro casos possíveis.

i) m par, n par

$$a^m.\left(2.(-1)^m + (-1)^{m-3n} - 1\right) = a^m.(2 + 1 - 1) \neq 0$$

(Não é possível!)

ii) m par, n ímpar

$$a^m.\left(2.(-1)^m + (-1)^{m-3n} - 1\right) = a^m.(2.1 - 1 - 1) = 0$$

(Possível!)

iii) m ímpar, n par

$$a^m.\left(2.(-1)^m + (-1)^{m-3n} - 1\right) = a^m.(-2 - 1 - 1) \neq 0$$

(Não é possível!)

iv) m ímpar, n ímpar

$$a^m.\left(2.(-1)^m + (-1)^{m-3n} - 1\right) = a^m.(-2 - 1 - 1) \neq 0$$

(Não é possível!)

Devemos, então, ter:

$$\boxed{\text{m par , n ímpar}}$$

Exercício 4.16

O valor da soma das raízes comuns às equações:

$$\begin{array}{l|l} x^4-7.x^3+16.x^2-15.x+3 & x^4-3.x^3-x^2-7.x+2 \\ \cline{2-2} \underline{-x^4+3.x^3+x^2+7.x-2} & 1 \\ -4x^3+17.x^2-8.x+1 & \end{array}$$

$\therefore$

$$\begin{array}{l|l} x^4-3.x^3-x^2-7.x+2 & 4x^3-17.x^2+8.x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^4+\frac{17}{4}.x^3-2.x^2+\frac{x}{4}} & \frac{x}{4}+\frac{5}{16} \\ \frac{5}{4}x^3-3.x^2-\frac{27}{4}.x+2 & \\ \underline{-\frac{5}{4}x^3+\frac{85}{16}x^3-\frac{5}{2}x+\frac{5}{16}} & \\ \frac{37}{16}x^2-\frac{37}{4}x+\frac{37}{16} & \equiv \frac{37}{16}(x^2-4.x+1) \end{array}$$

$\therefore$

$$\begin{array}{l|l} 4x^3-17.x^2+8.x-1 & x^2-4.x+1 \\ \cline{2-2} \underline{-4x^3+16.x^2-4.x} & 4x-1 \\ -\ x^2+4x-1 & \\ \text{Resto: } 0 & \end{array}$$

Do algoritmo do MDC segue que as raízes comuns às equações serão raízes do polinômio: $x^2-4.x+1 \quad \therefore \quad x=2\pm\sqrt{3}$

O valor da soma das raízes é, portanto: $\boxed{\text{Soma} = 4}$

Exercício 4.17

O mesmo procedimento do Exercício anterior poderia ser seguido. Porém, proporemos uma outra solução.

A primeira equação, pode ser alterada da seguinte forma:

$$x^4-2x^3-2.x^2-9.x^2+18.x+18=0$$
$$\Leftrightarrow\ x^2.(x^2-2.x-2)-9.(x^2-2.x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow\ (x^2-9).(x^2-2.x-2)=0$$

Note que, sabemos portanto as raízes da primeira equação. O primeiro fator multiplicante, nos indica que 3 e − 3 são raízes. Substituindo ambos os valores é fácil perceber que não são raízes da segunda equação.

Para verificar se os polinômios têm raízes comuns, a nossa única esperança seria no segundo fator multiplicante da primeira equação: $x^2-2.x-2$. Verifiquemos se a segunda equação é divisível por esse fator:

$$\begin{array}{l|l} x^4-12.x^3+44\,x^2-32.x-52 & x^2-2.x-2 \\ \cline{2-2} \underline{-x^4+2.x^3+2x^2} & x^2-10.x+26 \\ -10x^3+46.x^2-32.x-52 & \\ \underline{10.x^3-20.x^2-20.x} & \\ 26.x^2-52.x-52 & \\ \underline{-26.x^2+52.x+52} & \\ 0 & \end{array}$$

De fato, é divisível! As raízes comuns às duas equações são as raízes de:

$$x^2-2.x-2 \quad \therefore \quad \boxed{x=1\pm\sqrt{3}}$$

Exercício 4.18

Vamos montar o polinômio pedido:

$$P(x)=a.x^3+bx^2+cx+d$$
$$P(x-1)=P(x)+(2x)^2$$

Forçando a identidade:

$$a.(x-1)^3+b.(x-1)^2+c.(x-1)+d \equiv a.x^3+b.x^2+c.x+d+4.x^2$$
$$\Rightarrow \cancel{a.x^3}-3.a.x^2+3.a.x-a+\cancel{b.x^2}-2.b.x+b+\cancel{c.x}-c+\cancel{d}$$
$$\equiv \cancel{a.x^3}+\cancel{b.x^2}+\cancel{c.x}+\cancel{d}+4.x^2$$

$$P(x) = x^{2n+1} - (2n+1).x^{n+1} + (2n+1).x^n - 1 \qquad \rightarrow P(1) = 0 \quad ok!$$

$$P'(x) = (2n+1)x^{2n} - (2n+1)(n+1).x^n + (2n+1).n.x^{n-1}$$

$$= (2n+1).(x^{2n} - (n+1).x^n + n.x^{n-1}) \qquad \rightarrow P'(1) = 0 \quad ok!$$

$$P''(x) = (2n+1).((2n)x^{2n-1} - (n+1).n.x^{n-1} + n.(n-1).x^{n-2})$$

$$= (2n+1).n.(2.x^{2n-1} - (n+1).x^{n-1} + (n-1).x^{n-2}) \qquad \rightarrow P''(1) = 0 \quad ok!$$

$$P'''(x) = (2n+1).n.(2(2n-1).x^{2n-2} - (n+1).(n-1).x^{n-2} + (n-1).(n-2).x^{n-3})$$

$$\rightarrow P'''(1) \neq 0$$

Note que 1 não é raiz de P'''(x) mas é raiz de P(x), P'(x) e P''(x). Ou seja, 1 será raiz de multiplicidade 3 de P(x), ou ainda:

$$\boxed{k_{max} = 3}$$

Exercício 4.23 Seja k a raiz inteira de P(x). Podemos escrever que:

$$P(x) = (x - k).Q(x)$$

Dessa forma:

$$P(-1).P(0).P(1) = (1-k).(-k).(-1-k).\overbrace{Q(0).Q(-1).Q(1)}^{-A}$$

$$= A.(k-1).(k).(k+1)$$

Como A não necessariamente será inteiro, a afirmativa é **falsa**.

Exercício 4.24

P(x) é do quarto grau, portanto é do tipo:

$$P(x) = a.x^4 + b.x^3 + c.x^2 + d.x + e$$

Com isso: $P(1-x) = a.(1-x)^4 + b.(1-x)^3 + c.(1-x)^2 + d.(1-x) + e$

Desenvolvendo:

$$P(x) = a.(1 - 4.x + 6.x^2 - 4.x^3 + x^4) + b.(1 - 3.x + 3.x^2 - x^3) +$$

$$+ c.(1 - 2.x + x^2) + d.(1-x) + e$$

$$= a.x^4 + x^3.(-4.a - b) + x^2.(6.a + 3.b + c) +$$

$$+ x.(-4.a - 3.b - 2.c - d) + (a + b + c + d + e)$$

Da identidade P(x) = P(1-x) para todo x real, segue que os coeficientes correspondentes a cada expoente de x devem ser iguais:

$$\begin{cases} -4.a - b = b \\ 6.a + 3.b + c = c \\ -4.a - 3.b - 2.c - d = d \\ a + b + c + d + e = e \end{cases} \Rightarrow \sim \begin{cases} b = -2a \\ a - c = d \end{cases}$$

Existem infinitos polinômios que atendem à condição, e devem ser do tipo:

$$\boxed{a.x^4 - 2.a.x^3 + c.x^2 + (a-c).x + e \qquad a \in \mathbb{R}^*\ ,\ c, e \in \mathbb{R}}$$

OBS: ***a*** *deve ser não nulo, para que o polinômio seja do 4º grau.*

Exercício 4.25 Seja Q(x) = P(x) – 2. Sabemos que:

$$Q(1) = Q(-1) = Q(2) = Q(-2) = Q(-3) = Q(3) = 0$$

Da definição de Q(x), temos que este também é 6º grau Além disso, conhecemos todas as raízes de Q(x), de tal forma que podemos escrever:

$$Q(x) = a.(x-1).(x+1).(x-2).(x+2).(x+3).(x-3)$$

$$= a.(x^2 - 1).(x^2 - 4).(x^2 - 9)$$

Conhecemos a menos do valor da constante 'a', o polinômio P(x):

$$P(x) = a.(x^2 - 1).(x^2 - 4).(x^2 - 9) + 2$$

Para determinar o valor de 'a', façamos x = 0:

$$P(0) = a.(0-1).(0-4).(0-9) + 2 = 1 \quad \therefore \quad a = \frac{1}{36}$$

Com isso, podemos determinar P(4):

Exercício 4.29

Para que haja duas raízes comuns, o MDC entre os dois polinômios deve ser do segundo grau:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + a.x^2 + 0.x + 18 & x^3 + 0.x^2 + b.x + 12 \\ \underline{-x^3 \qquad\quad - b.x - 12} & 1 \\ \quad ax^2 - b.x + 6 & \end{array}$$

$\therefore$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 0.x^2 + b.x + 12 & ax^2 + 0.x^2 - b.x + 6 \\ \underline{-x^3 + \frac{b}{a}.x^2 - \frac{6}{a}.x} & \frac{x}{a} \end{array}$$

$$\frac{b}{a}x^2 + \frac{a.b-6}{a}.x + \frac{12.a}{a} \approx b.x^2 + (ab-6).x + 12.a$$

Para que o MDC seja do segundo grau, o divisor e o resto da ultima divisão devem ser múltiplos um do outro.

$$x^2 + \frac{(ab-6)}{b}.x + \frac{12.a}{b} \equiv x^2 - \frac{b}{a}.x + \frac{6}{a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{(ab-6)}{b} = -\frac{b}{a} \\ \frac{12.a}{b} = \frac{6}{a} \end{cases} \overset{a,b \text{ reais}}{\Rightarrow} \boxed{a = 1 \ ; \ b = 2}$$

As raízes comuns serão as raízes de: $x^2 - 2x + 6$, ou ainda: $\boxed{x = 1 \pm i\sqrt{5}}$

Exercício 4.30

Seja $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_1.x + a_0$

Da relação de Girard, como o produto das raízes vale 1:

$$(-1)^n.\frac{a_0}{a_n} = 1 \overset{n \text{ ímpar}}{\Rightarrow} a_n = -a_0$$

Com isso, segue que

$$P(1) = a_n.1^n + a_{n-1}.1^{n-1} + \ldots + a_1.1 + a_0$$
$$= a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$$
$$= \frac{(a_n + a_0).n}{2} \qquad (\text{Soma de P.A.})$$
$$= \frac{\overbrace{(a_n - a_n)}^{=0}.n}{2} = 0 \qquad \therefore \boxed{P(1) = 0}$$

Exercício 4.31 Sejam as raízes do tipo m, n, p, q. Do enunciado, temos que: m.n = – p.q. Das relações de Girard, podemos escrever:

$$\begin{cases} m + n + p + q = \frac{36}{144} = \frac{1}{4} & (\text{Eq. I}) \\ m.n + m.p + m.q + n.p + n.q + p.q = -\frac{28}{144} = -\frac{7}{36} & (\text{Eq.II}) \\ m.n.p + m.n.q + m.p.q + n.p.q = -\frac{11}{144} & (\text{Eq. III}) \\ m.n.p.q = -\frac{1}{144} & (\text{Eq. IV}) \end{cases}$$

Da Equação II, percebamos que:

$$\cancel{m.n} + m.p + m.q + n.p + n.q + \cancel{p.q} = -\frac{7}{36} \Rightarrow m.(p+q) + n.(p+q) = -\frac{7}{36}$$
$$\Rightarrow (m+n).(p+q) = -\frac{7}{36} \qquad (\text{Eq. V})$$

Aproveitando a simetria, chamemos: $A = m + n$; $B = p + q$. Das eqs I e V, segue que:

$$\begin{cases} A + B = \frac{1}{4} \\ A.B = -\frac{7}{36} \end{cases}$$

A e B serão, portanto, as raízes da equação do segundo grau:

$$36.\lambda^2 - 9.\lambda - 7 = 0$$

Logo:

$$A, B = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 144.7}}{72} = -\frac{1}{3} \text{ ou } \frac{7}{12}$$

Sem perda de generalidade, podemos escrever:

$$m+n=-\frac{1}{3} \quad ; \quad p+q=\frac{7}{12} \qquad \text{(Eq. VI)}$$

Voltando agora na equação IV:

$$(m.n).(p.q)=(m.n).(-m.n)=-(m.n)^2=-\frac{1}{144} \quad \therefore \ mn=\pm\frac{1}{12}$$

Ou seja, temos duas possibilidades: $\begin{cases} mn=\frac{1}{12} \\ p.q=-\frac{1}{12} \end{cases}$ ou $\begin{cases} mn=-\frac{1}{12} \\ p.q=\frac{1}{12} \end{cases}$

Devemos ter cuidado, pois essa escolha não é mais arbitrária, uma vez que já foi escolhido (sem perda de generalidade) os valores de (m + n) e de (p + q). A equação III nos deverá indicar qual dos casos escolher, uma vez que m, n, p, q devem atender à:

$$m.n.p+m.n.q+m.p.q+n.p.q=m.n.(p+q)+p.q.(m+n)=-\frac{11}{144}$$

$$\Rightarrow m.n.\frac{7}{12}-p.q.\frac{4}{12}=-\frac{11}{144}$$

$$\Rightarrow 7m.n-4p.q=-\frac{11}{12}$$

O que nos dá que a possibilidade correta é: $\begin{cases} mn=-\frac{1}{12} \\ p.q=\frac{1}{12} \end{cases}$ (Eq. VII)

Das eqs VI e VII, tiramos os valores de m, n, p, q. As raízes da equação são, portanto:

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$$

Exercício 4.32
Substituindo y da segunda equação na primeira:

$$a.\left(x^2+(x+k)^2\right)+2x=0 \Rightarrow a.\left(2.x^2+2.x.k+k^2\right)+2x=0$$

$$\Rightarrow 2.ax^2+2.xa.k+ak^2+2.x=0$$

$$\Rightarrow ax^2+x(ak+1)+\frac{ak^2}{2}=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-(ak+1)\pm\sqrt{a^2.k^2+2.a.k+1-2a^2k^2}}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-(ak+1)\pm\sqrt{-a^2.k^2+2.a.k+1}}{2}$$

Para qualquer que seja k, devemos ter: $f(k)=-a^2.k^2+2.a.k+1\geq 0$

Se *a* for não nulo, f(k) é uma equação do segundo grau em k, com determinante sempre positivo, e portanto, f(k) terá sempre raízes distintas. Graficamente, não é difícil notar que fora das duas raízes, teremos valores de f(k) negativos (o que é **contradição**, pois as soluções em x e y deveriam ser reais para quaisquer valores de k).

Ou seja, *a* não pode ser não-nulo, ou em outras palavras, a = 0. Veja que nesse caso, o determinante da equação do 2º grau em x vale 1 e terermos soluções reais para todos os valores reais de k.

Exercício 4.33 Seja k o valor da raiz mencionada da primeira:

$$\begin{cases} k^3-10k^2+31.k-30=0 \\ (3k)^3-21(3k)^2+98(3k)-120=0 \end{cases}$$

Multipliquemos a 1ª equação por 27 e em seguida, subtrairemos uma equação da outra:

$$\begin{cases} 27k^3-270k^2+837.k-810=0 \\ 27.k^3-189.k^2+294.k-120=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 81.k^2-543.k+690=0 \overset{\div 3}{\Rightarrow} 27.k^2-181.k+230=0$$

$$\Rightarrow k=\frac{181\pm\sqrt{32761-4.27.230}}{54}=\frac{181\pm 89}{54}=5 \text{ ou } \frac{46}{27}$$

Devemos verificar a raiz k na primeira equação. Por inspeção, vemos que 5 é raiz da primeira equação. O algoritmo de Briot-Ruffini, permite que achemos as outras raízes de cada uma das equações.

$$\begin{cases} x^3-10x^2+31.x-30=(x-2).(x-3).(x-5)=0 \\ x^3-21x^2+98.x-120=(x-2).(x-4).(x-15)=0 \end{cases}$$

1a equação: $S=\{2,\ 3,\ 5\}$
2a equação: $S=\{2,\ 4,\ 15\}$

Exercício 4.34

$$P(x)=a_0+a_1.x+a_2.x^2+...+a_n.x^n$$

Do enunciado:

$$\begin{cases} P(1)=a_0+a_1+a_2+...+a_n \text{ é ímpar} \\ P(0)=a_0 \text{ é ímpar} \end{cases} \Rightarrow a_1+a_2+...+a_n \text{ é par}$$

Como a soma $a_1+a_2+...+a_n$ é par, devemos ter um número par de coeficientes ímpares entre $a_1, a_2, ..., a_n$.

1 - Vejamos se é possível que P(x) tenha raízes <u>ímpares</u>:

Seja k um inteiro ímpar. P(x) é uma soma de parcelas do tipo $a_j.x^j$. Se a_j for par, é imediato que a parcela $a_j.x^j$ será par.

Mas $a_j.x^j$ se for ímpar, a parcela será ímpar. Lembrando que os coeficientes ímpares se encontram em número par, a soma de um número par de parcelas ímpares é par! Portanto:

$$a_1.k+a_2.k^2+...+a_n.k^n \text{ é sempre par!}$$

Como a_0 + é ímpar, segue que:

$$P(k)=a_0+a_1.k+a_2.k^2+...+a_n.k^n \text{ é sempre ímpar!}$$

Ou seja, para qualquer k ímpar, P(k) é ímpar (não podendo ser zero). Em outras palavras, não existe raízes ímpares de P(x).

2 - Vejamos se é possível que P(x) tenha raízes <u>pares</u>:

Seja k um inteiro par. P(x) é uma soma de parcelas do tipo $a_j.x^j$. Como x = k é par, todas as parcelas serão pares. Então:

$$a_1.k+a_2.k^2+...+a_n.k^n \text{ é sempre par!}$$

Como a_0 + é ímpar, segue que:

$$P(k)=a_0+a_1.k+a_2.k^2+...+a_n.k^n \text{ é sempre ímpar!}$$

Analogamente, P(x) não pode ter raízes pares.

Como as raízes não podem ser pares nem ímpares, concluímos que P(x) não tem raízes inteiras.

Exercício 4.35 O resultado da divisão, para não depender de x, deverá ser igual a uma constante numérica.

$$\frac{(2-m).x^3+(m-1).x^2+(n+1).x+(p-3)}{x^2-6x+1}=k$$

$$\Rightarrow (2-m).x^3+(m-1).x^2+(n+1).x+(p-3)\equiv k.(x^2-6x+1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-m=0 \\ m-1=k \\ n+1=-6.k \\ p-3=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ k=1 \\ n=-7 \\ p=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} m=2 \\ n=-7 \\ p=4 \end{cases}}$$

Exercício 4.36 $x^3+mx^2+n=0$

Usando o Teorema 4.4.1, como os coeficientes da equação são todos reais, se uma raiz é complexa, seu conjugado também será raiz. Dessa forma, temos que as raízes da equação são do tipo: $z,\ \bar{z},\ \alpha \quad (z,\bar{z}\in\mathbb{C},\ \alpha\in\mathbb{R})$

Da relação de Girard, temos que:

$$S_G^3=\alpha.z.\bar{z}=-n$$

$$\overset{\text{Formula 1.2.3}}{\Rightarrow} \alpha.|z|^2=-n \Rightarrow \alpha.k=-n \Rightarrow \alpha=-\frac{n}{k}$$

Como α é raiz do polinômio:

$$\alpha^3 + m\alpha^2 + n = 0 \Rightarrow \left(-\frac{n}{k}\right)^3 + m.\left(-\frac{n}{k}\right)^2 + n = 0$$

$$\Rightarrow -n^3 + m.n^2.k + n.k^3 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{m = \frac{n^3 - n.k^3}{n^2.k}}$$

Exercício 4.37 Considere solução de Báskara para a equação :

$$(p-3).x^2 - 2.p.x + 6p = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2p \pm \sqrt{4p^2 - 4.(p-3).6p}}{2p-6} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - (p-3).6p}}{p-3}$$

Primeiro, para que as raízes sejam reais, o determinante no radical deve ser positivo.

$$p^2 - (p-3).6p > 0$$
$$\Leftrightarrow -5p^2 + 18p > 0$$
$$\Leftrightarrow p.(18 - 5p) > 0$$

Se $p > 0$, para que o produto seja positivo, devemos ter: $18 - 5p > 0$ ou ainda, $p < 18/5$.

Não é possível o caso $p < 0$, pois para que o produto seja positivo, deveríamos ter $18 - 5p < 0$, o que levaria à condição: $p > 18/5$ (contraditória)

Ou seja, os valores de p que fazem a equação ter soluções distintas e reais é:

$$0 < p < \frac{18}{5} \qquad \textit{(Condição I)}$$

Além delas serem reais, as raízes devem ser positivas

$$x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - (p-3).6p}}{p-3} > 0$$

A maior das raízes será positiva sempre que o denominador for positivo (ou seja, sempre que $p > 3$). A nossa Condição I passa a estar um pouco mais restrita e representada pela condição II:

$$3 < p < \frac{18}{5} \qquad \textit{(Condição II)}$$

Para que a menor das raízes seja positiva, devemos ter o numerador positivo:

$$p - \sqrt{p^2 - (p-3).6p} > 0 \quad \Rightarrow p^2 > p^2 - (p-3).6p$$
$$\Rightarrow p.(p-3) > 0$$

Essa condição já é satisfeita pela Condição II. Ou seja, os valores de p que tornam as raízes positivas e reais, são:

$$\boxed{3 < p < \frac{18}{5}}$$

OBS: *Uma outra saída (talvez mais rápida) seria impor a condição das raízes serem positivas ao restringir que ambos o produto e soma das raízes da equação do segundo grau devem ser positivos.*

Exercício 4.38 $P(x) = x^4 - 14.x^2 + 24.x - k$

Para que as 4 raízes sejam distintas, não deverá haver raízes duplas de P(x). De acordo com o Resultado. 4.8.1, as possibilidades de raízes duplas são raízes de P'(x).

$$P'(x) = 4.x^3 - 28.x + 24$$

Olhando para P'(x), logo salta aos olhos o fato de que os coeficientes do polinômio têm soma nula. Ou seja, x = 1 é raiz de P'(x). Uma simples redução de grau pelo algoritmo de Briot-Ruffini nos dá as demais raízes do polinômio.

$$P'(x) = 4.(x-1).(x-2).(x+3)$$

As únicas possibilidades de raízes duplas seriam x = 1, x = 2, x = -3. Para que não haja raizes duplas basta que P(x) não se anule para nenhum desses três valores.

$$P(1) = 11 - k \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \neq 11$$
$$P(2) = 8 - k \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \neq 8$$
$$P(-3) = -117 - k \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \neq -117$$

Ou seja:

$$\boxed{k \neq -117,\ 8\ ,\ 11}$$

Exercício 4.39

Suponha P(x) de grau n com n + 1 raízes distintas: k_1, k_2, ...k_{n+1} da seguinte forma: $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1.x + a_0$

Como k_1, k_2, ...k_{n+1} são raízes:

$$\begin{cases} a_n.k_1^n + a_{n-1}.k_1^{n-1} + ... + a_1.k_1 + a_0 = 0 \\ a_n.k_2^n + a_{n-1}.k_2^{n-1} + ... + a_1.k_2 + a_0 = 0 \\ a_n.k_3^n + a_{n-1}.k_3^{n-1} + ... + a_1.k_3 + a_0 = 0 \\ \quad ... \\ a_n.k_n^n + a_{n-1}.k_n^{n-1} + ... + a_1.k_n + a_0 = 0 \\ a_n.k_{n+1}^n + a_{n-1}.k_{n+1}^{n-1} + ... + a_1.k_{n+1} + a_0 = 0 \end{cases}$$

Note que as equações acima constituem um sistema linear nas variáveis:

$$a_n,\ a_{n-1}, ..., a_1,\ a_0$$

O sistema linear é um sistema homogêneo, o que nos leva a uma entre as duas possibilidades: sistema possível e determinado (soluções todas nulas, ou triviais), ou sistema possível e indeterminado. Para sabermos qual dentre as duas possibilidades é verdade, verifiquemos o determinante principal da matriz do sistema linear.

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} k_1^n & k_1^{n-1} & ... & k_1 & 1 \\ k_2^n & k_2^{n-1} & ... & k_2 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ k_n^n & k_n^{n-1} & ... & k_n & 1 \\ k_{n+1}^n & k_{n+1}^{n-1} & ... & k_{n+1} & 1 \end{vmatrix}_{n+1 \times n+1}$$

Trata-se do Determinante de Vandermonde cujo resultado é conhecido:

$$\text{Det} = (k_1 - k_2).(k_1 - k_3)....(k_1 - k_{n+1}).(k_2 - k_3).... = \prod_{i,j}(k_i - k_j)$$

Ora, mas as raízes são distintas, ou seja, o produtório do determinante é não nulo. Ou seja, como o determinante principal é não nulo, o sistema linear homogêneo é Possível e Determinado, e admite, portanto, somente a solução trivial: $a_n = a_{n-1} = ... = a_1 = a_0 = 0$. P(x) é, portanto, necessariamente o polinômio identicamente nulo.

Conclusão direta do resultado: *Um polinômio com infinitas raízes reais só pode ser o polinômio identicamente nulo.*

Exercício 4.40 Considere o polinômio: $Q(x) = (x+1).P(x) - 1$.

Como P(x) é de grau n – 1 , Q(x) é de grau n.

Note que: $Q(k) = (k+1).\frac{1}{k+1} - 1 = 0$ para k = 1, 2, 3 , ..., n.

Ora, conhecemos todas as raízes de Q(x)! Podemos escrever Q(x) na forma fatorada:

$$Q(x) = A.(x-1).(x-2)....(x-n)$$

onde A é uma constante a ser determinada.

Para determinar A, façamos x = - 1 em $Q(x) = (x+1).P(x) - 1$:

$$A.(-1-1).(-1-2)....(-1-n) = (-1+1).P(-1) - 1$$

$$\Rightarrow A.(-1)^n.(n+1)! = -1$$

$$\Rightarrow A = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

E com isso, podemos escrever:

$$\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.(x-1).(x-2)....(x-n) = (x+1).P(x) - 1$$

Fazendo x = 0 na expressão acima:

$$\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.(0-1).(0-2)....(0-n) = (0+1).P(0) - 1$$

$$\Rightarrow \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.(-1)^n.(n!) = P(0) - 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overbrace{(-1)^{2n+1}}^{=-1}}{n+1} = P(0) - 1$$

$$\therefore \boxed{P(0) = \frac{n}{n+1}}$$

Exercício 4.41 Sejam m, n, k as raizes da equação. Das relações de Girard, segue:

$$\begin{cases} m.n + n.k + m.k = 0 \\ m.n.k = b > 0 \end{cases}$$

Vamos abrir a análise em dois casos (a existência ou não de raízes complexas). No primeiro caso, seja m uma raíz complexa. Como os coeficientes são reais, de acordo com o Teorema 4.4.1, o seu conjugado também é raiz (seja n esse conjugado). Logo:

$$m.n.k = b \Rightarrow m.\bar{m}.k = b \Rightarrow |m|^2.k = b \Rightarrow k = \frac{b}{|m|^2} \in \mathbb{R}_+^*$$

Ou seja, nesse caso está provado que só existe um única raiz real positiva. Vejamos agora o caso de raízes somente reais. Da condição m.n.k > 0, sabemos que devemos ter ou as 3 positivas ou 2 negativas e uma positiva. Se as 3 forem positivas, a condição m.n + n.k + m.k = 0 não é satisfeita, portanto a única possibilidade é que sejam 2 raízes negativas e 1 positiva.

Em ambos os casos possíveis, ficou provado, portanto, que só existe uma única raíz real positiva.

Exercício 4.42 Considere o polinômio genérico:

$$P(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_n.x^n$$

Para um dado real *a*, tomemos x = x – a + a.

$$P(\underbrace{x-a+a}_{=x}) = a_0 + a_1.(x-a+a) + a_2.((x-a)+a)^2 + ... + a_n.((x-a)+a)^n$$

Note que no desenvolvimento aparecem vários binômios com parcelas (x – a) e *a*, elevados a diferentes potências. O binômio de Newton nos garante que:

$$((x-a)+a)^k = \sum_{j=0}^{k} a^j.(x-a)^{k-j}$$

Ou seja, cada parcela está desenvolvida em termos de potências de (x–a). Consequentemente, temos que P(x) pode ser desenvolvido em potências de (x - a). Ou ainda, podemos dizer que existem $A_0, A_1, ..., A_n$ tais que, para um dado *a* real:

$$P(x) = A_0 + A_1.(x-a) + A_2.(x-a)^2 + ... + A_n.(x-a)^n$$

Exercício 4.43 Aproveitando o resultado da solução do Exercício 4.24 no qual determinamos todos os polinômios do 4° grau possíveis com a condição P(x) = P (1 – x), temos:

$$P(x) = a.x^4 - 2.a.x^3 + c.x^2 + (a-c).x + e \qquad a \in \mathbb{R}^*,\ c, e \in \mathbb{R}$$

Como o coeficiente do quarto grau é unitário, temos a = 1.

De P(0) = 0 e P(-1) = 6 , segue:

$$\begin{cases} P(0) = 0^4 - 2.0^3 + c.0^2 + (1-c).0 + e = 0 & \Rightarrow e = 0 \\ P(-1) = (-1)^4 - 2.(-1)^3 + c.(-1)^2 + (1-c).(-1) = 6 & \Rightarrow c = 2 \end{cases}$$

Logo:

$$\boxed{P(x) = x^4 - 2.x^3 + 2.x^2 - x}$$

Exercício 4.44 Considere a expressão dada como sendo um polinômio do 3° grau em x:

$$P(x) = x^3 - (3.y.z).x + (y^3 + z^3)$$

Note que x = - y – z é raíz do polinômio, pois:

$$\begin{aligned} P(-y-z) &= (-y-z)^3 - (3.y.z).(-y-z) + (y^3+z^3) \\ &= -(y^3 + 3yz.(y+z) + z^3) + 3.y.z(y+z) + (y^3+z^3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sabendo uma das raízes do polinômio, podemos reduzir o seu grau pelo algoritmo de Briot-Ruffini:

	1	0	-3.y.z	y³ + z³
- y - z	1	- y – z	y² + z² -y.z	0

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - (-y-z)).(x^2 - (y+z).x + (y^2 + z^2 - yz)) \\ &= (x+y+z).(x^2 - xy - xz + y^2 + z^2 - yz) \end{aligned}$$

O que nos leva ao resultado de fatoração bastante conhecido (e bastante importante):

$$\boxed{x^3 + y^3 + z^3 - 3.x.y.z = (x+y+z).(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)}$$

Exercício 4.45 Do resultado de 4.42 sabemos que qualquer polinômio pode ser desenvolvido em série de potências de (x – a) para um dado a real.

$$P(x) = A_0 + A_1.(x-a) + A_2.(x-a)^2 + ... + A_n.(x-a)^n \quad \textbf{(Eq. I)}$$

Vamos determinar os coeficientes. Façamos x = a na Eq. I:

$$P(a) = A_0 + \underbrace{A_1.(a-a) + A_2.(a-a)^2 + ... + A_n.(a-a)^n}_{=0} \Rightarrow A_0 = P(a)$$

Sabemos que um polinômio é uma função derivável em qualquer ponto real, e em qualquer ordem. Derivando a Eq. I com relação a x:

$$P'(x) = A_1 + 2.A_2.(x-a) + 3.A_3.(x-a)^2 ... + n.A_n.(x-a)^{n-1} \textbf{(Eq. II)}$$

Fazendo x = a agora na Eq. II:

$$P'(a) = A_1 + \underbrace{2.A_2.(a-a) + 3.A_3.(a-a)^2 ... + n.A_n.(a-a)^{n-1}}_{=0} \Rightarrow A_1 = P'(a)$$

Derivando a Eq. II com relação a x:

$$P''(x) = 2.A_2 + 3.2A_3.(x-a) + ... + n.(n-1).A_n.(x-a)^{n-2} \textbf{ (Eq. III)}$$

Fazendo x = a na Eq. III:

$$P''(a) = 2.A_2 + \underbrace{3.2A_3.(a-a) + ... + n.(n-1).A_n.(a-a)^{n-2}}_{=0} \Rightarrow A_2 = \frac{P''(a)}{2}$$

Repetindo o processo, n vezes teremos os valores de todos os coeficientes.

$$A_k = \frac{P^{(k)}}{k!}$$

Voltando na expressão inicial da equação I, temos que:

$$P(x) = P(a) + P'(a).(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}.(x-a)^2 + ... + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n$$

Exercício 4.46
Seja P(x) um polinômio genérico dado por:

$$P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1.x + a_0$$

Considere a divisão de P(x) por (x – a), dando o quociente Q(x) de grau n –1 e um resto r real:

$$Q(x) = q_{n-1}.x^{n-1} + ... + q_1.x + q_0$$

$$\Rightarrow P(x) \equiv \left(q_{n-1}.x^{n-1} + ... + q_1.x + q_0\right).(x-a) + r$$

$$\Rightarrow P(x) \equiv q_{n-1}.x^n + \left(q_{n-2} - a.q_{n-1}\right).x^{n-1} + ... + \left(q_0 - a.q_1\right).x + \left(-aq_0 + r\right)$$

Da identidade acima, tiramos:

$$\begin{cases} a_n = q_{n-1} & \Rightarrow & q_{n-1} = a_n \\ a_{n-1} = q_{n-2} - a.q_{n-1} & \Rightarrow & q_{n-2} = a_{n-1} + a.q_{n-1} \\ a_{n-2} = q_{n-3} - a.q_{n-2} & \Rightarrow & q_{n-3} = a_{n-2} + a.q_{n-2} \\ \quad ... & & \\ a_2 = q_1 - a.q_2 & \Rightarrow & q_1 = a_2 + a.q_2 \\ a_1 = q_0 - a.q_1 & \Rightarrow & q_0 = a_1 + a.q_1 \\ a_0 = r - a.q_0 & \Rightarrow & r = a_0 + a.q_0 \end{cases}$$

Note que o resultado destacado justifica exatamente a forma de como é disposta o Algoritmo de Briot-Ruffini.

Exercício 4.47 Utilizaremos o seguinte artifício:
"Se dois polinômios são tais que um divide o outro, então estes dois polinômios são iguais!".

Da definição de divisão, temos que:

$$M(x) = N(x).Q(x) + R(x) \quad \Rightarrow R(x) = M(x) - N(x).Q(x) \quad \text{(Eq. I)}$$

Chamemos de A(x), o MDC entre M e N, e B(x) o MDC entre N e R.

Da definição de MDC, sabemos que A(x) divide M(x). Portanto, podemos dizer que existe um polinômio D1(x) tal que:

$$M(x) = A(x).D_1(x) \quad \text{(Eq. II)}$$

Analogamente, como A(x) divide N(x), existe D2(x) tal que:

$$N(x) = A(x).D_2(x) \quad \text{(Eq. III)}$$

Concluímos que o fato de k ser raíz, implica k² ser raiz também! Ora, mas se k² é raiz, então, pela mesma razão mostrada, (k²)² será raiz, e assim em diante. De modo que, se as potências k^2, k^4, k^8, ..., forem diferentes uma das outras, implicará que P(x) tem infinitas raízes!

Vimos no exercício anterior que um polinômio com infinitas raízes é o polinômio identicamente nulo. Como procuramos polinômios diferentes do polinômio nulo, a menos que as potências k^2, k^4, k^8, ..., sejam iguais, não poderemos ter k como raíz de P(x). Ou seja, para que k complexo seja raíz de P(x), não identicamente nulo, devemos ter:

$$k^2 = k^4 = k^8 = \ldots.$$

Note que isso acontece nos casos da raíz que supomos como verdadeira (x = 0), e também para x = 1 (que deverá ser raíz se 0 é raiz). O único outro número complexo que poderia atender à condição é o complexo k = -1, uma vez que, para este complexo,

$$k^2 = k^4 = k^8 = \ldots.$$

Mas é facil ver que x = -1 não pode ser raíz de P(x). Façamos x = –2 na expressão da Eq. I:

$$P(4) + P(-2).P(-1) = 0$$

Isso mostra que, se -1 é raíz, então 4 é raíz. Se 4 é raíz, então 16 é raíz, e por aí segue novamente o problema das infinitas raízes.
Com uma simples análise, descobrimos que P(x) pode ter somente 1 e 0 como raízes. P(x) pode, portanto, ser da forma:

$$P(x) = a.x^m.(x-1)^n$$

onde a, m, n são constantes. Lembre-se de que não provamos ainda que x = 0 é raíz (apenas nós supomos como verdade e concluímos algumas consequências interessantes). O polinômio acima é apenas uma proposta de solução. Para verificarmos se o polinômio proposto serve à equação I, substituiremos o mesmo na equação:

$$P(x^2) + P(x).P(x+1) \equiv 0$$

$$\Rightarrow a.x^{2m}.(x^2-1)^n + a.x^m.(x-1)^n.a.(x+1)^m.(x)^n \equiv 0$$

$$\Rightarrow a.x^m.x^m.(x-1)^n.(x+1)^n + a^2.x^m.(x-1)^n.(x+1)^m.(x)^n \equiv 0$$

$$\Rightarrow a.x^m.(x-1)^n.\left[x^m.(x+1)^n + a.(x+1)^m.x^n\right] \equiv 0$$

$$\Rightarrow \left[x^m.(x+1)^n + a.(x+1)^m.x^n\right] \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ m = n \end{cases}$$

O polinômio P(x) proposto satisfaz Eq. I. Ou seja, x = 0 é raíz desde que x = 1 é raíz com a mesma multiplicidade, e o coeficiente de maior grau seja –1.

$$\boxed{P(x) = -x^n.(x-1)^n}$$

Soluções – Capítulo 5

Exercício 5.1
De acordo com o Resultado 5.2.2, uma equação recíproca de 2ª Espécie terá grau par somente quando 1 e –1 forem raízes. O resultado 5.2.1 garante que uma equação recíproca de 2ª espécie tem sempre a raiz 1.

Ou seja, a partir da equação recíproca de 2ª espécie de grau ímpar genérica abaixo, para se obter uma equação de segunda espécie de grau par, devemos acrescentar a raiz –1 (multiplicar pelo fator (x + 1)).

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^j - a_kx^{j-1} + \ldots - a_1x - a_0$$

Multiplicando por (x + 1):

$$\left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^j - a_kx^{j-1} - \ldots - a_1x - a_0\right).(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \left(a_0x^{n+1} + a_1x^n + \ldots + a_kx^{j+1} - a_kx^j - \ldots - a_1x^2 - a_0x\right) + \\ + \left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^j - a_kx^{j-1} - \ldots - a_1x - a_0\right) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_0}_{b_0}x^{n+1} + \underbrace{(a_1+a_0)}_{b_1}.x^n + \ldots + \underbrace{(a_k - a_k)}_{=0}.x^j - \ldots \underbrace{-(a_1+a_0)}_{=-b_1}.x \underbrace{-a_0}_{=-b_0} = 0$$

Note que o termo central sempre se anulará.

Exercício 5.2 Recorrendo ao método de resolução de equações recíprocas, pelo Algoritmo de Briot-Ruffini, primeiro retiraremos as raízes 1 e –1, resultando na seguinte equação:

$$P(x) = (x+1).(x-1).\left(x^4 + 2.x^3 + (1+a).x^2 + 2.x + 1\right)$$

As demais raízes virão de:

$$x^4 + 2.x^3 + (1+a).x^2 + 2.x + 1 = 0$$

Dividindo a equação pelo expoente de x do termo central e agrupando:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2.\left(x+\frac{1}{x}\right)+(1+a)=0$$

Fazendo a mudança de variáveis: $x+\frac{1}{x}=y$

$$\Rightarrow y^2-2+2.y+(1+a)=0$$
$$\Rightarrow y^2+2.y+(a-1)=0$$
$$\Rightarrow y=\frac{-2\pm\sqrt{4-4.(a-1)}}{2}=-1\pm\sqrt{2-a}$$

As soluções em y e x devem ser reais:

$$\Delta_y=2-a\geq 0 \quad\Rightarrow\quad a\leq 2 \quad \text{(Condição I)}$$

Voltando na variável x:

$$x+\frac{1}{x}=y \quad\Rightarrow\quad x^2-y.x+1=0 \quad\Rightarrow\quad \Delta_x=y^2-4\ \geq 0 \quad \text{(Condição II)}$$

Da solução em y e da condição II vem:

$$\left(-1\pm\sqrt{2-a}\right)^2-4\geq 0 \quad\Rightarrow 1\pm 2.\sqrt{2-a}+2-a-4\geq 0$$
$$\Rightarrow \pm 2.\sqrt{2-a}\geq a+1$$
$$\Rightarrow -2.\sqrt{2-a}\geq a+1 \qquad \text{(Condição III)}$$

A igualdade na inequação da condição III ocorre quando:

$$-2.\sqrt{2-a}=a+1 \Rightarrow 8-4a=a^2+2a+1$$
$$\Rightarrow a^2+6a-7=0$$
$$\Rightarrow a=1 \text{ ou } a=-7$$

Na verdade, a = 1 é uma solução falsa criada quando elevamos a equação ao quadrado. Veja: $-2.\sqrt{2-a}\Big|_{a=1}=-2\ \neq\ (a+1)\Big|_{a=1}=2$

Ou seja, a igualdade da condição III ocorre somente para a = – 7. Para os demais valores de a temos:

$$\begin{cases}-2.\sqrt{2-a}\geq a+1 & ,\ \text{se } a\leq -7\\ -2.\sqrt{2-a}\leq a+1 & ,\ \text{se } a\geq -7\end{cases}$$

Resumindo, o valor de a que atende às condições vistas é: $a\leq -7$

Exercício 5.3 Da hipótese, sabemos que p/q é raíz de P(x). Podemos escrever P(x) na seguinte forma.

$$P(x)=a_n.\left(x-\frac{p}{q}\right).Q(x)$$

(Eq. I)

Ou ainda: $$P(x)=-\frac{a_n}{q}.(p-q.x).Q(x)$$

Sabemos que, do Teorema 5.1.1, q deve dividir o termo a_n. Em outras palavras, o termo a_n/q é inteiro.

Fazendo x = m na Equação I: $P(m)=-\frac{a_n}{q}.(p-m.q).Q(m)$

O que nos leva a conclusão de que: $\frac{P(m)}{(p-m.q)}=\underbrace{\left(-\frac{a_n}{q}\right)}_{\in\mathbb{Z}}.\underbrace{Q(m)}_{\in\mathbb{Z}}\ \in\ \mathbb{Z}$

Ou seja, (p – m.q) divide P(m).

Exercício 5.4 Sejam m, n, p, q as raízes da equação, com: m + n = p + q.

Das relações de Girard, temos que:

$$\begin{cases}S_G^1=(m+n)+(p+q)=-a\\ S_G^2=mn+mp+mq+np+nq+pq=b\\ S_G^3=mnp+mnq+mpq+npq=-c\end{cases}$$

Mexendo um pouquinho nas equações chegamos a:

$$\begin{cases}m+n=p+q=-\frac{a}{2}\\ (m+n).(p+q)=mp+mq+np+nq\\ \qquad =b-(mn+pq)\\ mnp+mnq+mpq+npq=mn.(p+q)+pq.(m+n)\\ \qquad =-\frac{a}{2}.(mn+pq)\end{cases}$$

Juntando as informações acima, chega-se a:

$$b=\left(-\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{a}{2}\right)+\frac{-c}{-(a/2)}$$

$$\Rightarrow 4.a.b=a^3+8c$$

$$\overset{\div 8}{\Rightarrow}\ \frac{a^3}{8}-\frac{ab}{2}+c=0$$

(Eq. I)

Para determinarmos a equação transformada, recorremos ao algoritmo.

	1	a	b	c	d
$-a/4$	1	$3a/4$	$-3a^2/16+b$	$3a^3/64-ab/4+c$	$-3a^4/256+a^2b/16-ac/4+d$
$-a/4$	1	$2a/4$	$-5a^2/16+b$	$a^3/8-ab/2+c$	
$-a/4$	1	$a/4$	$-3a^2/8+b$		
$-a/4$	1	0			

Equação transformada:

$$y^4+y^2.\left(-\frac{3.a^2}{8}+b\right)+y.\left(\frac{a^3}{8}-\frac{ab}{2}+c\right)+\left(-\frac{3a^4}{256}+\frac{b.a^2}{16}-\frac{ac}{4}+d\right)=0$$

Note que, da Eq. I mostrada, o coeficiente d y é nulo, e com isso, a equação é biquadrada!

Exercício 5.5 Note que:

$$\frac{1}{m^2-4m+4}+\frac{1}{n^2-4n+4}+\frac{1}{p^2-4p+4}=\frac{1}{(m-2)^2}+\frac{1}{(n-2)^2}+\frac{1}{(p-2)^2}$$

Fazendo a transformada y = x – 2, teremos como resultado uma equação com raízes m' , n', p', tais que: $m'=m-2$; $n'=n-2$; $p'=p-2$ .No fundo, portanto, o problema pede a soma dos inversos dos quadrados das raízes da nova equação transformada.

Façamos a transformação utilizando o Algoritmo para Transformadas Aditivas:

	1	2	15	47
2	1	4	23	93
2	1	6	35	
2	1	8		

Equação Transformada: $y^3+8.y^2+35.y+93=0$

Escrevamos agora as Somas de Newton para a equação acima, sendo m', n', p' as suas raízes.

$$\begin{cases} S_1^*=m'+n'+p'=S_G^1=-8 \\ S_0^*=m'^0+n'^0+p'^0=1+1+1=3 \\ S_{-1}^*=\frac{1}{m'}+\frac{1}{n'}+\frac{1}{p'}=\frac{n'.p'+m'.p'+m'.n'}{m'.n'.p'}=\frac{S_G^2}{S_G^3}=\frac{35}{-93} \end{cases}$$

Do Teorema de Newton (Resultado 4.5.1):

$$S_1^*+8.S_0^*+35.S_{-1}^*+93.S_{-2}^*=0$$

$$\Rightarrow -8+8.3-35.\frac{35}{93}+93.S_{-2}^*=0 \quad \Rightarrow S_{-2}^*=-\frac{263}{8649}$$

Com isso: $S_{-2}^*=\frac{1}{m'^2}+\frac{1}{n'^2}+\frac{1}{p'^2}=\frac{1}{(m-2)^2}+\frac{1}{(n-2)^2}+\frac{1}{(p-2)^2}=-\frac{263}{8649}$

$$\boxed{\frac{1}{m^2-4m+4}+\frac{1}{n^2-4n+4}+\frac{1}{p^2-4p+4}=-\frac{263}{8649}}$$

OBS: *Não estranhe uma soma de quadrados perfeitos dar negativos. Lembre-se que m, n, p podem ser complexos!*

Exercício 5.6 Seja y = x/k a transformada multiplicativa, onde k é a constante a ser determinada.

$$(k.y)^3-5.(ky)+10=0 \quad \Rightarrow y^3-y.\frac{5}{k^2}+\frac{10}{k^3}=0$$

Da comparação com a 2ª equação, segue:

$$y^3 - y.\frac{5}{k^2} + \frac{10}{k^3} \equiv y^3 - 80.y + 640 \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{k^2} = 80 \\ \frac{10}{k^3} = 640 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

Transformada usada: $y = 4.x$

Exercício 5.7

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2 \ldots+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2=2n$$

$$\Rightarrow\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^4+2+\frac{1}{x^4}\right)+\left(x^6+2+\frac{1}{x^6}\right)+\ldots+\left(x^{2n}+2+\frac{1}{x^{2n}}\right)=2n$$

$$\Rightarrow\left(x^2+x^4+x^6+\ldots+x^{2n}\right)+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\ldots+\frac{1}{x^{2n}}\right)+\cancel{2n}=\cancel{2n}$$

$$\Rightarrow\left(x^2.\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right)+\left(\frac{1}{x^2}.\frac{\frac{1}{x^{2n}}-1}{\frac{1}{x^2}-1}\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(x^2.\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right)-\left(\frac{1}{x^{2n}}.\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right).\left(x^2-\frac{1}{x^{2n}}\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(x^{2n}-1\right).\left(x^{2n+2}-1\right)=0 \quad , \ x\neq 0, \pm 1$$

Com isso, temos:

$$\begin{cases} x^{2n}=1 \\ \text{ou} \\ x^{2n+2}=1 \end{cases} , \quad x \neq 0, \pm 1$$

Extraindo as raízes da unidade:

$$x \in \left\{ cis\left(\frac{2.k.\pi}{n}\right) \text{ ou } cis\left(\frac{k.\pi}{n+1}\right) \quad , \ k \in \mathbb{Z} \right\} - \{0, -1, 1\}$$

Exercício 5.8 O enunciado nos dá n pontos pelo qual o polinômio P(x), de grau n-1, deve passar, uma vez que:

$$P(k) = \frac{1}{k+1} \ , \quad k = 1,2,3,\ldots,n$$

O Teorema 5.4.1 nos garante que esse polinômio existe. Utilizaremos a expressão de Lagrange para montar o polinômio.

O Polinômio P(x) montado pelo raciocínio de Lagrange, fica:

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k}.a_k(x)$$

Onde os coeficientes de Lagrange são dados por:

$$a_k(x) = \frac{(x-1).(x-2)\ldots.(x-(k-1)).(x-(k+1))\ldots.(x-n)}{(k-1).(k-2)\ldots..(k-(k-1)).(k-(k+1))\ldots.(k-n)}$$

Como o problema nos pede P(0), convém determinar cada coeficiente de Lagrange avaliado em x = 0:

$$a_k(0) = \frac{(0-1).(0-2)\ldots.(0-(k-1)).(0-(k+1))\ldots.(0-n)}{(k-1).(k-2)\ldots..(k-(k-1)).(k-(k+1))\ldots.(k-n)}$$

A princípio a fração acima parece "assustadora". Vamos arrumar ela um pouquinho.

$$a_k(0) = \frac{(-1).(-2)\ldots(-(k-1)).(-(k+1))\ldots.(-n)}{\left[(k-1).(k-2)\ldots.(1)\right].\left[(-1)\ldots..(-(n-k))\right]}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}.\left(\frac{n!}{k}\right)}{\left[(k-1)!\right].\left[(-1)^{n-k}.(n-k)!\right]}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1-n+k}.n!}{k.(k-1)!.(n-k)!}$$

$$= (-1)^{k-1}.\frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

$$= (-1)^{k-1}.C_n^k$$

Olha só! O que parecia "assustador" começa a parecer "familiar". Com os coeficientes avaliados em x = 0 calculados, temos que P(0) vale:

$$P(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_n^k}{1+k}.(-1)^{k-1} = \frac{C_n^1}{2} - \frac{C_n^2}{3} + \frac{C_n^3}{2} - +.... + (-1)^{n-1}\frac{C_n^n}{1+n}.$$

Ora, mas quem estudou direitinho a parte de Complexos do livro está lembrado que já nos deparamos com somatórios deste tipo.

Se você voltar aos exercícios já resolvidos do Capítulo 3, verá que, inclusive, já calculamos essa mesma soma no Exercício 3.12 (expressão (I)):

$$\frac{C_n^1}{2} - \frac{C_n^2}{3} + -... + \frac{C_n^n.(-1)^{n+1}}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Logo:

$$\boxed{P(0) = \frac{n}{n+1}}$$

Muito interessante, não?

Exercício 5.9

Do Exercício 4.42, sabemos que um polinômio qualquer pode ser escrito em termos de potências de (x – a).

$$P(x) = A_0 + A_1.(x-a) + A_2.(x-a)^2 + ... + A_n.(x-a)^n$$

Os coeficientes A0, A1, ..., An nada mais são do que os restos nas sucessivas divisões de P(x) por (x – a). Aproveitando o algoritmo de Briot-Ruffini, justifica-se a origem do algoritmo para as transformadas aditivas mencionado na seção 5.3

Exercício 5.10

De acordo com o Resultado 5.2.2 toda equação recíproca de grau par e 2ª espécie possui 1 e –1 como raízes. Como todos os coeficientes da equação são reais, pelo Teorema 4.4.1, se i é raíz, - i também será. Ou seja, já conhecemos 4 das 6 raízes da equação.

$$P(x) = (x-1).(x+1).(x-i).(x+i).(a.x^2 + b.x + c)$$
$$= (x^4 - 1).(a.x^2 + b.x + c)$$
$$= a.x^6 + b.x^5 + c.x^4 - a.x^2 - b.x - c$$

Para que a equação seja recíproca de 2ª espécie, os coeficientes simétricos devem ser iguais em módulo e com sinais contrários, de tal modo que:

$$P(x) = a.x^6 + b.x^5 + a.x^4 - a.x^2 - b.x - a$$

Do enunciado, P(2) = -105/8 e P(-2) = 255/8:

$$\begin{cases} P(2) = 64a + 32b + 16a - 4a - 2b - a = 75.a + 30.b = -\dfrac{105}{8} & \therefore 5.a + 2.b = -\dfrac{7}{8} \\ P(-2) = 64a - 32b + 16a - 4a + 2b - a = 75.a - 30.b = \dfrac{255}{8} & \therefore 5.a - 2.b = \dfrac{17}{8} \end{cases}$$

Resolvendo, chegamos a: a = 1/8 e b = -3/4. A soma das raízes é dada (Relação de Girard) -b/a = 6.

$$\boxed{\text{Soma das raízes} = 6}$$

Exercício 5.11

Como a equação é recíproca de 1ª Espécie, os coeficientes simétricos devem ser iguais. Além disso, como 1 é raiz, a soma dos coeficientes é nula. Portanto:

$$\begin{cases} a + c + 2 = a + b + 4 \\ b + 3c + 1 = c - a \\ (a + c + 2) + (b + 3c + 1) + (c - a) + (a + b + 4) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, chegamos a: a = 4 , b = –3 e c = –1. Logo, o produto a.b.c vale 12.

$$\boxed{abc = 12}$$

Exercício 5.12 $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$

A equação já é uma equação recíproca reduzida, pois não possui 1 e –1 como raizes. Aplicando o método de resolução de equações recíprocas:

$$\overset{\div z^2}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{z^2} + z^2\right) + \left(\frac{1}{z} + z\right) + 1 = 0$$

$$\frac{1}{z}+z=y$$
$$\Rightarrow \quad (y^2-2)+(y)+1=0$$
$$\Rightarrow \quad y^2+y-1=0$$
$$\Rightarrow \quad y=\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1}{z}+z$$

Sendo $w=\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}$, teremos:

$$\Rightarrow \quad z^2-w.z+1=0 \qquad \text{(Eq. I)}$$
$$\Rightarrow \quad z=\frac{w\pm\sqrt{w^2-4}}{2}$$

Verifiquemos o sinal de w^2-4:

$$w^2-4=\left(\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}\right)^2-4=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}<0$$

Ou seja, todas as raízes serão complexas! Portanto a afirmativa I é falsa.

Analisando a equação I, vemos que, pela Relação de Girard, que o produto das raízes é 1 para cada um dos dois valores de w. Como cada valor de w representa um par de raízes complexas conjugadas, temos que os produtos dos dois pares vale 1 cada. Lembrando que o produto de dois números complexos conjugados é o quadrado do seu módulo, conclui-se que o módulo de todas as raízes é 1.

$$\begin{cases} z_1.z_2=z_1.\bar{z}_1=|z_1|^2=1 \\ z_3.z_4=z_3.\bar{z}_3=|z_3|^2=1 \end{cases} \Rightarrow |z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$$

Ou seja, a afirmativa II também é falsa. Utilizando o mesmo argumento da resolução do Exercício 1.20 para a afirmativa III vemos que a mesma é verdadeira.

Exercício 5.13

Como os coeficientes da equação são reais, se temos uma raiz complexa, seu conjugado também é raíz (Teorema 4.4.1). Ou seja, já conhecemos duas das raízes do polinômio:

$$\frac{1}{2}\pm\frac{i}{2}$$

O Teorema 5.1.1 garante, que se soluções racionais existem, então elas devem ser: $\pm 1/2$ ou ± 1 . O enunciado diz que a equação possui duas raízes inteiras distintas. Ou seja, 1 e –1 devem obrigatoriamente ser raízes também.

Conhecemos todas as raízes do polinômio:

$$2.x^4+a.x^3+b.x^2+c.x-1=2.\left(x-\frac{1+i}{2}\right)\left(x-\frac{1-i}{2}\right).(x-1).(x+1)$$
$$=2.(x^2-x+1).(x^2-1)$$
$$=2.x^4-2.x^3-x^2+2.x-1$$

Ou seja: $a=-2$, $b=-1$, $c=2$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{\max(a,b,c)=c=2}$

Exercício 5.14

De acordo com o Resultado 5.3.1, o valor da constante da transformada aditiva que eliminará o termo do 3º grau de P(x) será raiz da 3ª derivada de P(x).

$$P(x)=x^4+a.x^3+b.x^2+c.x+d \Rightarrow P'(x)=4.x^3+3.a.x^2+2.b.x+c$$
$$\Rightarrow P''(x)=12.x^2+6.a.x+2.b$$
$$\Rightarrow P'''(x)=24.x+6.a$$

A constante da transformada aditiva será a raíz de P'''(x): $\alpha=-\frac{6a}{24}=-\frac{a}{4}$

Utilizando o Algoritmo para Transformadas Aditivas:

	1	a	b	c	d
- a/4	1	3a/4	...		...
-a/4	1	a/2		...	
-a/4	1	a/4	...		
-a/4	1	0			

Chegamos à seguinte equação, após a transformação: $t=x-\alpha$:

$$t^4+p.t^2+q.t+r=0$$

Exercício 5.15 $t^4 + p.t^2 + q.t + r = 0$

Começando do lado esquerdo da equação a ser demonstrada:

$$\left(t^2+p\right)^2 = t^4 + 2.p.t^2 + p^2 = \left(t^4 + p.t^2\right) + \left(p.t^2 + p^2\right)$$

Mas da equação original, temos que: $t^4 + p.t^2 = -q.t - r$

Logo: $\left(t^2+p\right)^2 = \left(-qt - r\right) + \left(p.t^2 + p^2\right) = p.t^2 - q.t - r + p^2$

Exercício 5.16
Queremos mostrar que, para um y qualquer:

$$\left(t^2+p+y\right)^2 = (p+2y).t^2 - q.t + (p^2 - r + 2py + y^2)$$

Começando pelo lado esquerdo da equação:

$$\left(t^2+p+y\right)^2 = (t^2+p)^2 + 2.y.(t^2+p) + y^2$$
$$= p.t^2 - q.t - r + p^2 + 2y.(t^2+p) + y^2$$
$$= (p+2y).t^2 - q.t + (p^2 - r + 2.p.y + y^2)$$

Como y é um valor arbitrário, vamos escolher y tal que o lado direito da equação seja um quadrado perfeito. Note que a parte direita da equação é um polinômio do 2° grau em t. Para que seja um quadrado perfeito, a equação do segundo grau em t deve ter raiz dupla (ou ainda, o determinante da solução de Báskara deve ser nulo).

$$q^2 - 4.(p+2y).(p^2 - r + 2py + y^2) = 0$$
$$\Rightarrow q^2 - 4p^3 + 4pr - 8.p^2y - 4.p.y^2 - 8.p^2y + 8.y.r - 16p.y^2 - 8.y^3 = 0$$
$$\Rightarrow (q^2 - 4.p^3 + 4.p.r) + y.(-16.p^2 + 8.r) + y^2.(-20.p) + y^3.(-8) = 0$$

Exercício 5.17
Olhando a solução do Exercício 5.15, podemos escolher y tal que a expressão abaixo seja uma igualdade de quadrados perfeitos:

$$\left(t^2+p+y\right)^2 = (p+2y).t^2 - q.t + (p^2 - r + 2py + y^2) \quad \text{(Eq. I)}$$

Para isso, basta resolvermos a equação do 3° grau em y:

$$(q^2 - 4.p^3 + 4.p.r) + y.(-16.p^2 + 8.r) + y^2.(-20.p) + y^3.(-8) = 0$$

Para isso, pode-se aplicar, por exemplo, o Método de Cardano (conhecido para a resolução de equações cúbicas).
A igualdade de quadrados perfeitos da eq.I, ao se extrair a raíz quadrada em ambos os membros, torna-se duas equações do 2° grau (facilmente resolvíveis em t). Conhecendo a solução em t, a solução em x é dada por:

$$x = t + \alpha$$

Soluções – Capítulo 6

Exercício 6.1 A primeira condição a ser imposta é que a equação do 2° grau dada tenha 2 rízes reais distintas:

$$\Delta > 0 \iff 4 - 4.(2m).(-3m-2) > 0 \overset{\div 4}{\iff} 1 + 6m^2 + 4m > 0$$

Porém, é fácil ver de acordo com o Resultado 6.2.3 que a desigualdade é sempre satisfeita, pois a equação do 2° grau em m é sempre positiva (possui determinante sempre negativo)!

O problema pede que x = 1 esteja entre as raízes. Recorrendo ao Resultado 6.2.4, a condição para que isto ocorra é:

$$(2m).(2m - 2 - 3m - 2) < 0$$
$$\iff m.(m+4) > 0$$
$$\iff m < -4 \text{ ou } m > 0$$

Ou seja, os valores de m que atendem às condições do problema são:

$$m < -4 \text{ ou } m > 0$$

Exercício 6.2
Aplicando diretamente o Resultado 6.2.4, para que x = 1 esteja entre as raízes, devemos ter:

$$a.f(1) < 0$$
$$\iff \underbrace{a}_{>0}.(a+b+c) < 0$$
$$\iff a+b+c < 0$$

Resposta: Opção (b)

OBS: *Se você estiver se questionando a respeito da questão acima ser "fácil demais", peço que se pergunte se acharia o mesmo antes de ter estudado o Resultado 6.2.4. ☺ É aí que está o poder do resultado ☺ !*

Exercício 6.3
A primeira restrição é que a equação do 2º grau tenha duas raízes reais distintas:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 4(m-2).(2m-3) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 < 0$$
$$\Leftrightarrow (m-1).(m-6) < 0$$
$$\Leftrightarrow 1 < m < 6 \qquad \text{(Condição I)}$$

Além disso, para que $-1 < x_1 < 4 < x_2$, devemos ter 4 entre as raízes e -1 fora das raízes. Do Resultado 6.2.4, segue a condição:

$$\begin{cases} a.f(-1) > 0 \\ a.f(4) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-2).((m-2)+2m+2m-3) > 0 \\ \text{e} \\ (m-2).(16.(m-2)-8m+2m-3) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5.(m-2).(m-1) > 0 \\ \text{e} \\ 5(m-2).(2m-7) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \text{ ou } m > 2 \\ \text{e} \\ 2 < m < \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \quad 2 < m < \frac{7}{2} \qquad \text{(Condição II)}$$

Fazendo a interseção entre as condições I e II, chegamos aos valores de m que atendem às condições do problema:

$$\boxed{2 < m < \frac{7}{2}}$$

Exercício 6.4

$$f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = (x-b).(x-c) + (x-a).(x-c) + (x-a).(x-b) = 0 \\ x \neq a, b, c \end{cases}$$

Como a, b, c não são raízes de P(x), é fácil perceber que todas as raízes de f(x) são raízes de P(x), e vice-versa. O problema passa a ser o mesmo, só que com a função P(x) a ser analisada no lugar de f(x). Como P(x) é um polinômio, o problema tornou-se um pouco mais fácil !

Queremos provar que: $a < x_1 < b < x_2 < c$. Aplicaremos a Extensão do Teorema de Bolzano (Resultado 6.3.2) a seguir. Note que, como a < b < c:

$$P(a) = \underbrace{(a-b)}_{<0}.\underbrace{(a-c)}_{<0} > 0$$
$$P(b) = \underbrace{(b-a)}_{>0}.\underbrace{(b-c)}_{<0} < 0$$
$$P(c) = \underbrace{(c-a)}_{>0}.\underbrace{(c-b)}_{>0} > 0$$

Logo, P(a) e P(b) têm sinais contrários, bem como acontece no par P(b) e P(c). Pela Extensão do Teorema de Bolzano, existe um número ímpar de raízes reais em (a,b) e um número ímpar de raízes reais em (b,c). Como os intervalos (a,b) e (b,c) são disjuntos, e P(x) só possui no máximo 2 raízes reais distintas, uma delas está em (a,b) e a outra em (b,c).
Note que P(a) e P(c) têm sinais iguais, o que garante que um número par de raízes reais existe em (a,c), reafirmando a existência de duas raízes distintas.

Exercício 6.5
Como os coeficientes são inteiros, do Resultado 4.4.1, se z é a raiz complexa, o conjugado de z também será raiz. O enunciado diz que há uma raiz real k. Ou seja, a priori, conhecemos a existência de 3 raízes de P(x).

Note que: $\begin{cases} P(0) = 1 \\ P(1) > 0 \end{cases} \Rightarrow P(0).P(1) > 0$

Com isso, segue, da Extensão do Teorema de Bolzano (Resultado 6.3.2) que existe um número par de raízes <u>reais</u> em [0, 1] ou zero raízes (ou ainda em (0,1) uma vez que x = 0 e x = 1 não são raízes)

Analisemos as afirmações:

i) **(VERDADEIRA)** Se k é racional, do Teorema 5.1.1, k deve ser do tipo p/q onde p divide o termo independente 1, e q divide o termo de maior grau, 1. As possibilidades para k são ± 1. Como P(1) > 0, segue que k deve ser -1.

ii) **(FALSA)** Se k real pertence a (0,1), como devemos ter um número par de raízes reais em (0,1), há no mínimo uma segunda raiz real nesse intervalo. Sob essa hipótese, há no mínimo 4 raízes de P(x), e com isso $n \geq 4$

iii) **(VERDADEIRA).** Para que exista q(x) tal que P(x) = Q(x).(x–1), P(x) deveria ser divisível por x–1, o que acarretaria em P(1) = 0. Porém, sabemos que P(1) > 0. Logo não é possível existir q(x) sob as condições especificadas.

iv) **(VERDADEIRA).** Conforme já foi dito, o número de raízes reais em [0,1] é par.

v) **(VERDADEIRA).** Apenas a afirmação (ii) é falsa.

Exercício 6.6 Seja $P(x) = x^3 - 3.x^2 - 9x + b$

Resolveremos a questão graficamente. Vamos analisar o gráfico de P(x) para diferentes valores de b.

$$P'(x) = 3x^2 - 6.x - 9 = 3.(x^2 - 2x - 3) = 3.(x+1).(x-3)$$

Os valores de x que anulam P'(x) são x = –1 e x = 3 (pontos críticos de P(x)).

$$P''(x) = 6.x - 6$$

Note que P"(x) < 0 para x < 1 e, P"(x) > 0 para x > 1. Ou seja, P(x) tem concavidade para baixo para x < 1 e concavidade para cima para x > 1.

Pelo teste da 2^a derivada (Resultado Apêndice.6) como P"(–1) < 0 e P"(3) > 0, temos que x = –1 é um ponto de máximo e x = 3 é um ponto de mínimo. O ponto x = 1 é onde a concavidade da função muda (é um ponto de inflexão de P(x)).
Além disso, a medida que x diminui indefinidamente até o infinito negativo, a função vai ficando cada vez mais negativa, e à medida que x aumenta indefinidamente até o infinito positivo, a função vai ficando cada vez mais positiva.
A única coisa que falta para determinarmos o gráfico é o valor de b. Com as informações que temos até agora, temos as seguintes possibilidades de esboços:

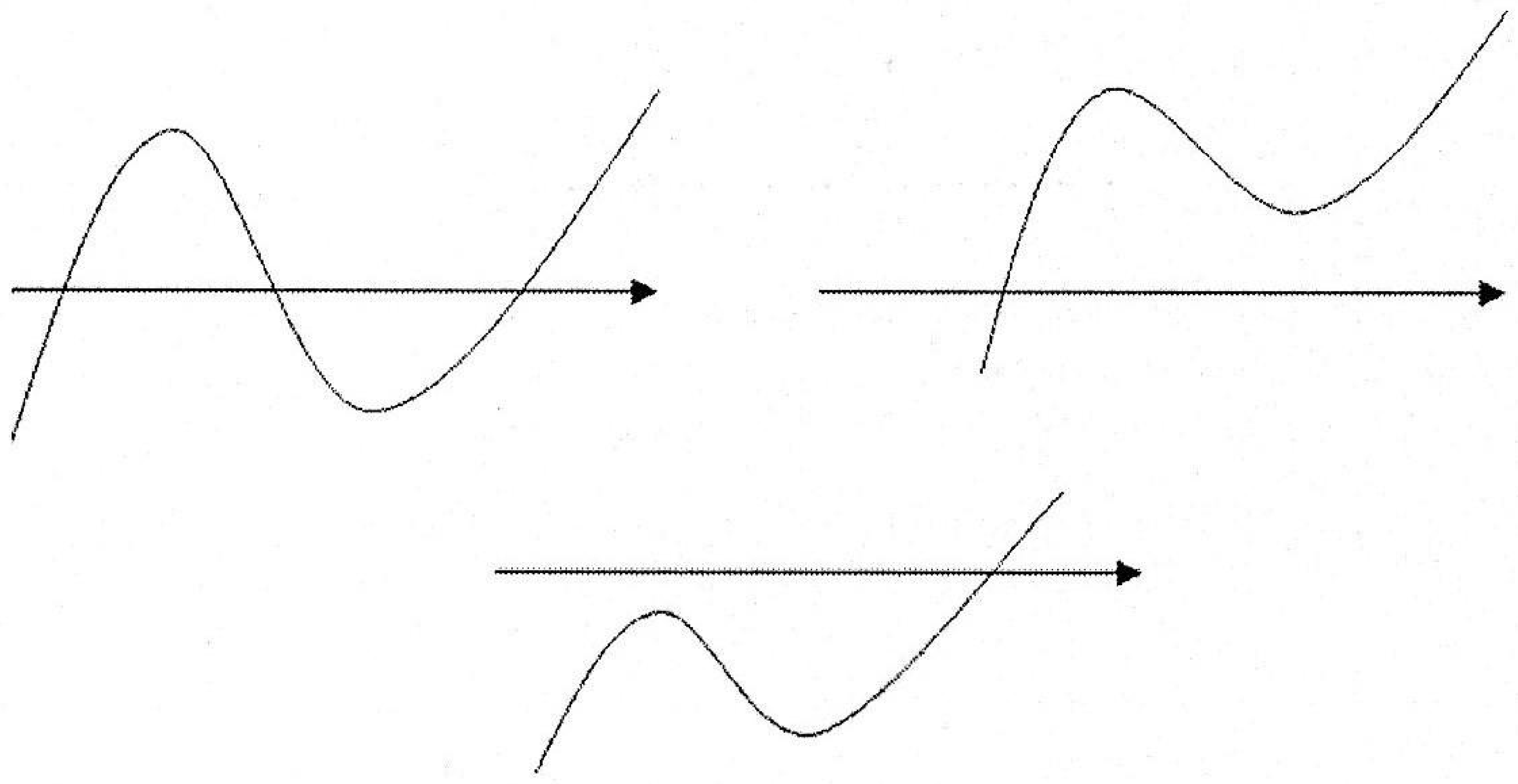


Fig. Ex-6. 6

Dentre as possibilidades, a única na qual teremos 3 raízes distintas é o caso em que o máximo em x = -1 é positivo e o mínimo em x = 3 é negativo.

Ou seja, devemos restringir que: $\begin{cases} P(-1) > 0 \\ P(3) < 0 \end{cases}$

Da condição mencionada, segue:

$$\begin{cases} P(-1) > 0 \Rightarrow -1 - 3 + 9 + b > 0 \Rightarrow b > -5 \\ P(3) < 0 \Rightarrow 27 - 27 - 27 + b < 0 \Rightarrow b < 27 \end{cases}$$

Ou seja:

$$\boxed{-5 < b < 27}$$

Exercício 6.7 Note que as potências de x formam uma soma de PG. Podemos simplificar a equação para buscar saber mais sobre as raízes de P(x).

$$x + x^2 + x^3 + x^4 - 500 = 0 \Rightarrow \frac{x^5 - x}{x - 1} = 500$$

$$\Rightarrow x^5 - x = 500.(x-1) \quad , \; x \neq 1$$

$$\Rightarrow x^5 = 501x - 500 \quad , \; x \neq 1$$

Como queremos saber o número de raízes reais, basta sabermos em quantos pontos as funções f(x) = x^5 e g(x) = 501.x – 500 se cruzam (desconsiderando o cruzamento em x = 1). Veja a figura (a escala não foi mantida para a melhor visualização)

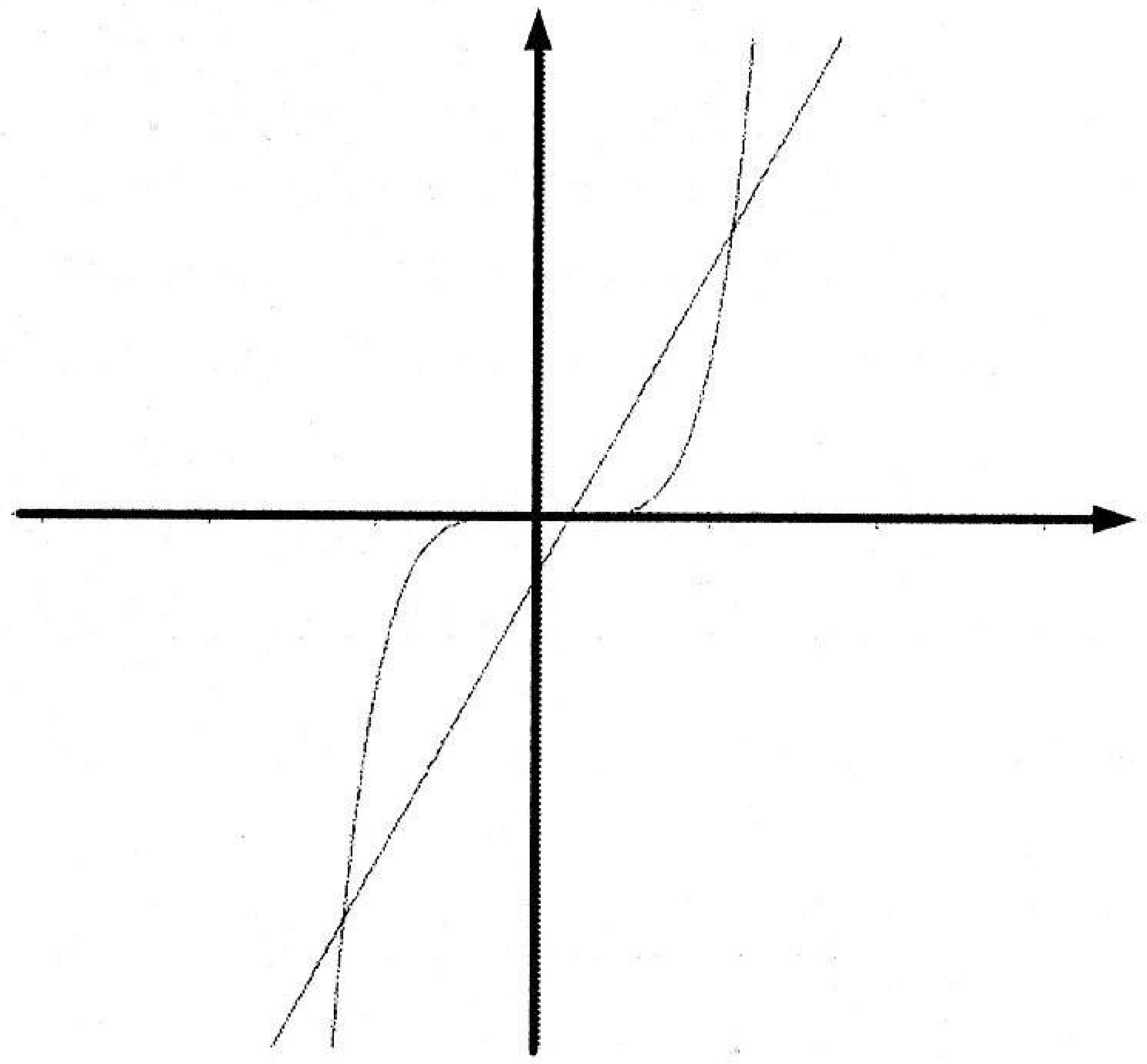


Fig. Ex-6. 7

Após o cruzamento em x = 1, como a função polinomial f(x) de 5º grau cresce mais rápido que a equação do 1º grau g(x), é fácil ver que haverá mais um cruzamento para x positivo e outro cruzamento pra x negativo. Como estamos descartando a raiz x = 1 (que não é raiz da equação original), sabemos que há exatamente **duas** raízes reais para a equação .

Exercício 6.8 Sabemos que o resto da divisão de um polinômio por um outro de grau 2 é no máximo de grau 1.

$$P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right).(x-1).Q(x) + (a.x + b)$$

Do gráfico temos que: P(1/2) = 1/8 e P(1) = 0.

$$\begin{cases} P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{2} + b = \frac{1}{8} \\ P(1) = a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \quad b = \frac{1}{4}$$

Com isso: $\boxed{R(x) = -\frac{x}{4} + \frac{1}{4}}$

Exercício 6.9

$$P(x) = x^3 - 4.x + 1 \Rightarrow P'(x) = 3.x^2 - 4 \Rightarrow P''(x) = 6.x$$

Achando os pontos críticos:

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 3.x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Concavidade:

$$\begin{cases} P''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ (concavidade para cima)} \\ P''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ (concavidade para baixo)} \end{cases}$$

Logo o ponto crítico em $x = -2\sqrt{3}/3$ é ponto de máximo e em $x = 2\sqrt{3}/3$ é de mínimo. O ponto x = 0 é o ponto de mudança de concavidade (ponto de inflexão).

$$\begin{cases} P\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{16\sqrt{3}+9}{9} > 0 \\ P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-16\sqrt{3}+9}{9} < 0 \end{cases}$$

Os limites no infinito são: $\lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$

Como reforço para o nosso gráfico, note que: $P(-2) = P(2) = P(0) = 1$

Já dá pra fazer um esboço do gráfico:

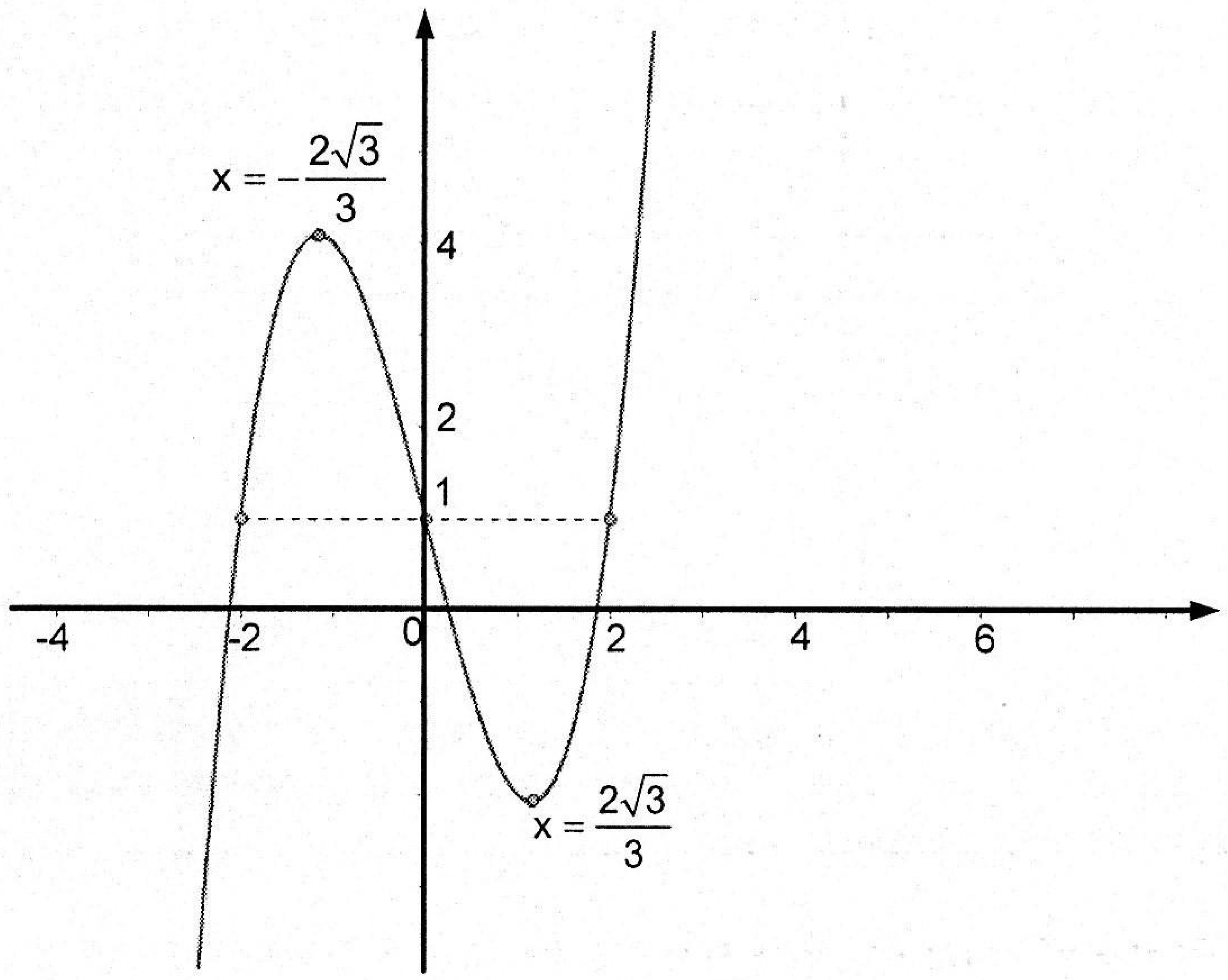


Fig. Ex-6. 9

O Teorema de Bolzano garante que as raízes estão cada uma nos seguintes intervalos:

$$(-3, -2) \;;\; (0, 1) \;;\; \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$$

OBS: *Se quiséssemos determinar exatamente as raízes, poderíamos recorrer ao Método de Cardano.*

Exercício 6.10
M(x) é construído somando 1 ao polinômio P(x). Isso translada o polnômio uma unidade para cima.

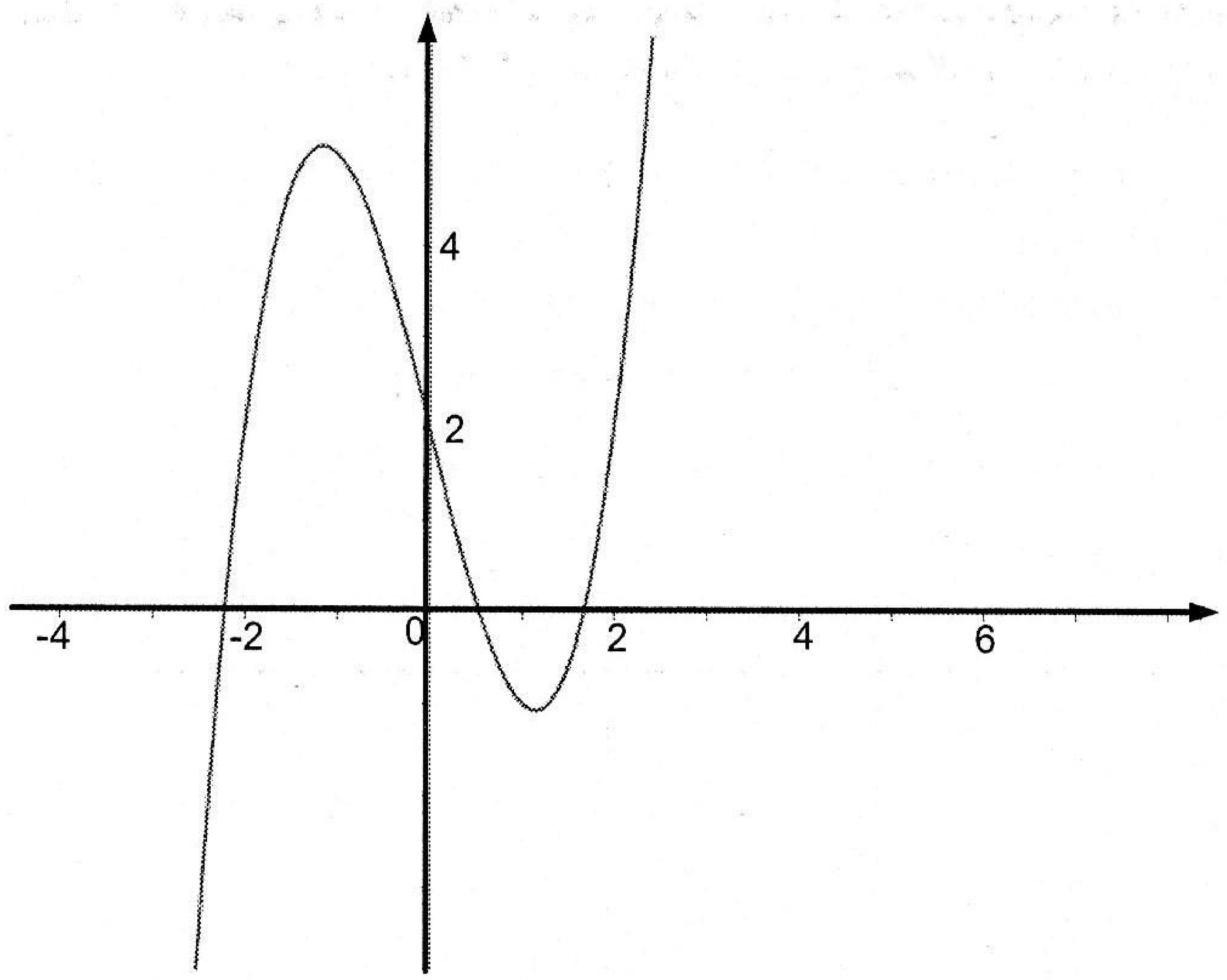


Fig. Ex-6. 10.a

N(x) é construido multiplicando P(x) por 3. Todos os pontos de P(x) têm sua ordenada triplicada (é como se "estícassemos" verticalmente o gráfico). O gráfico é representado a seguir:

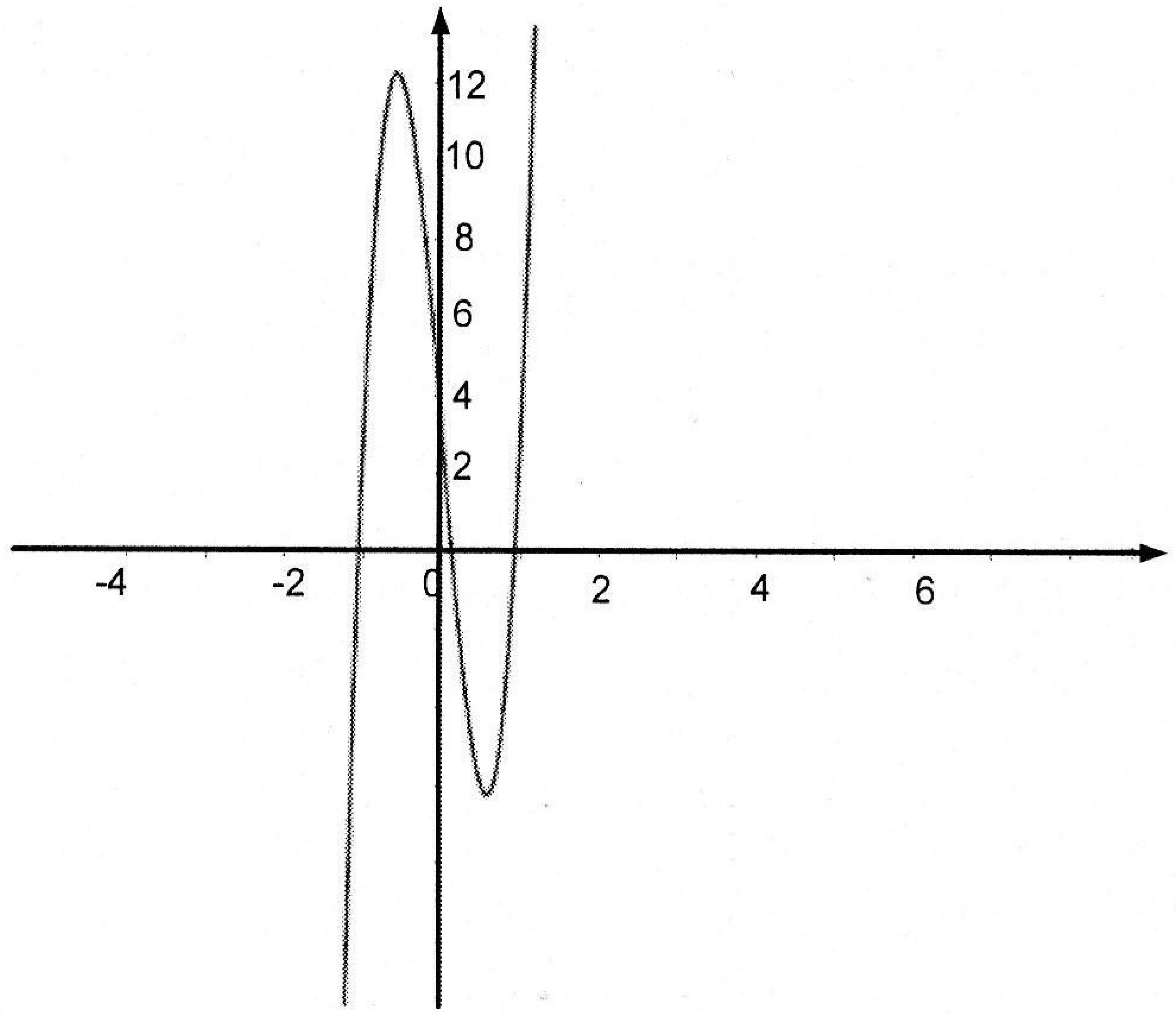


Fig. Ex-6. 10.b

Q(x) é construído somando 3 ao argumento de P(x). Com isso, estamos transladando o gráfico 3 unidades para a esquerda.

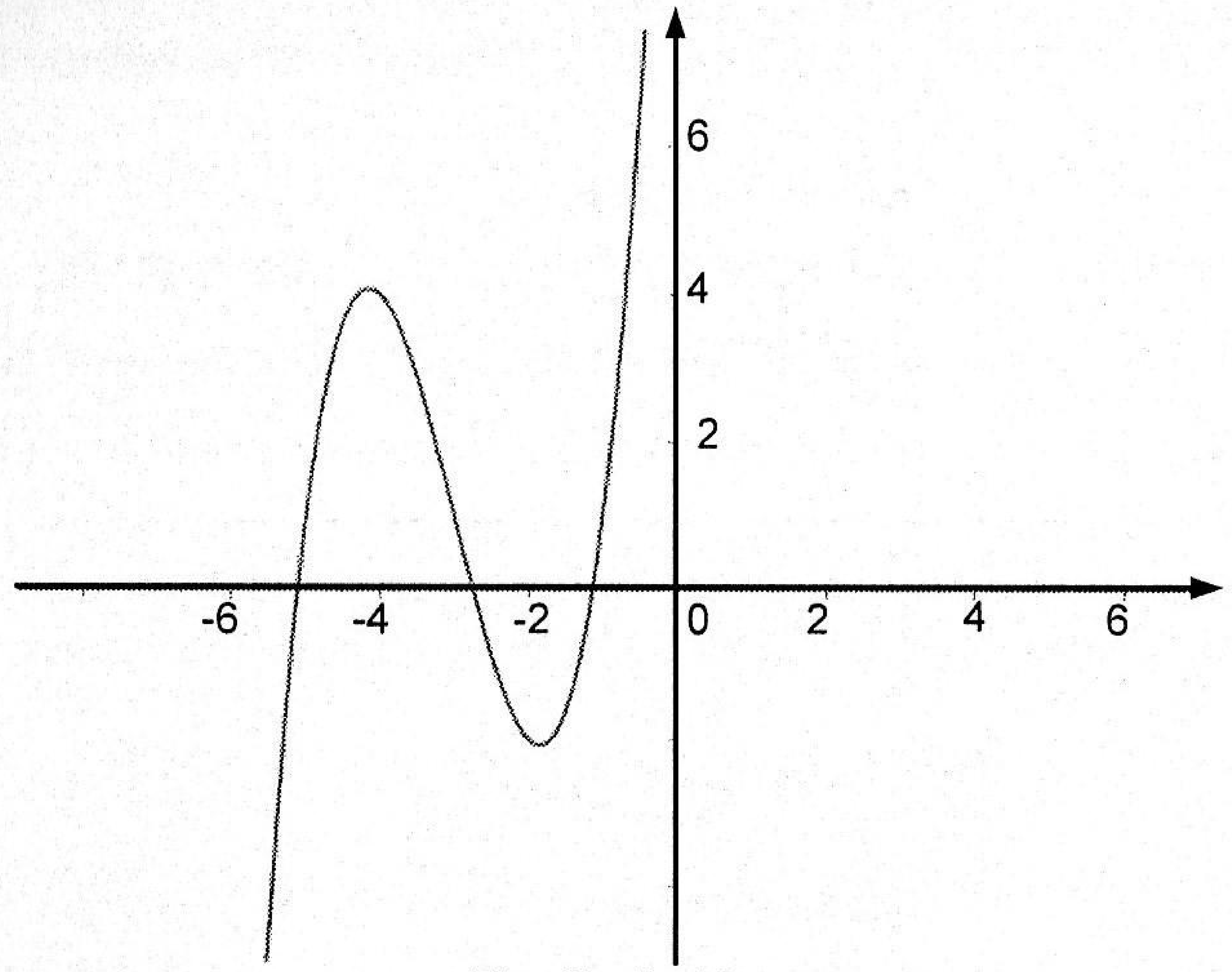


Fig. Ex-6. 10.c

Finalmente, o gráfico de P'(x) pode ser construído diretamente a partir do gráfico de P(x). Os pontos onde P(x) é crescente, serão os pontos onde P'(x) é positivo. Os pontos críticos de P(x) serão as raízes de P'(x).

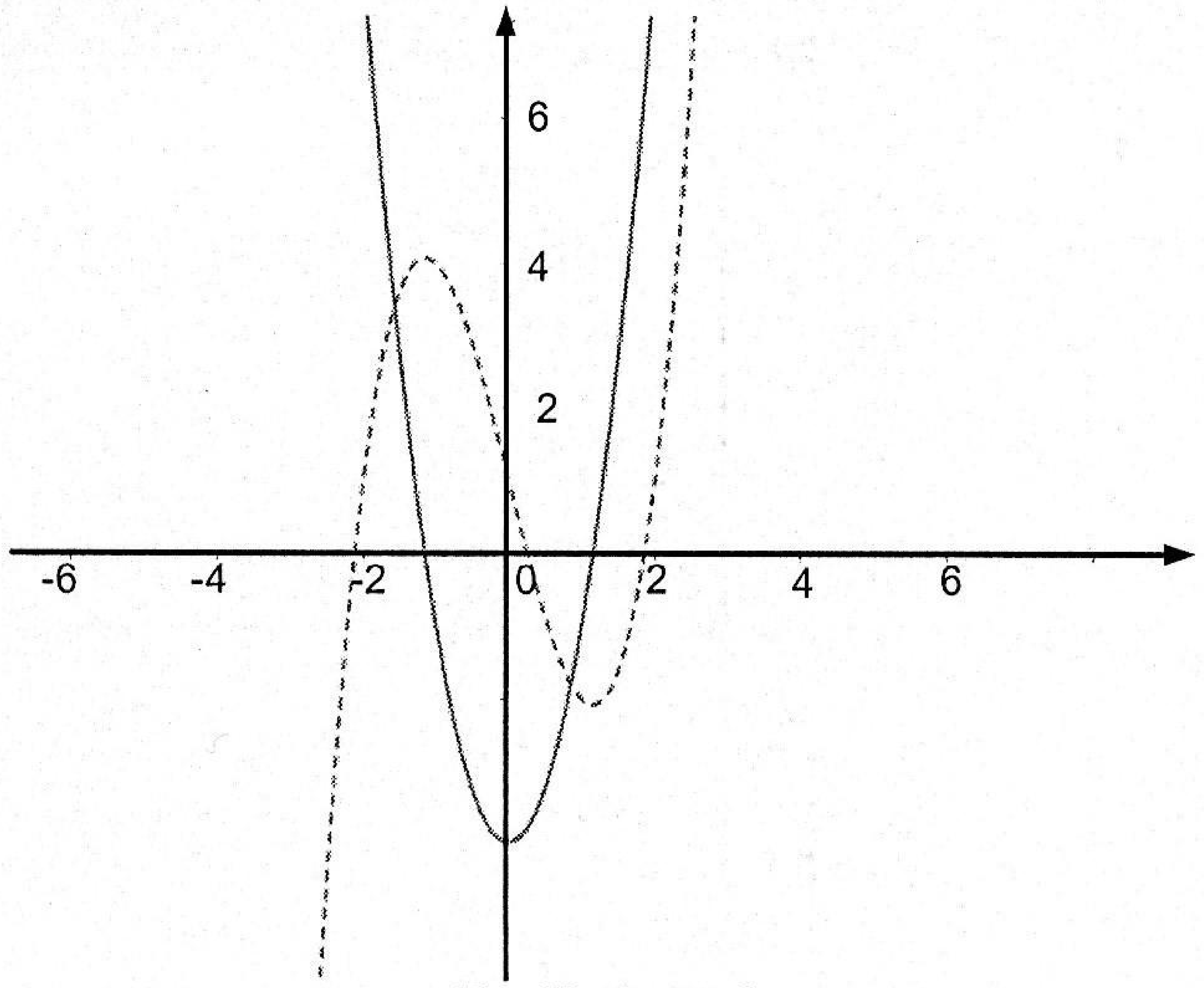


Fig. Ex-6. 10.d

Exercício 6.11 Seja: $P(x) = 12.x^3 - 16.x^2 - 3.x + 4$

$P(0) = 4 > 0$ $\quad P(1) = -3 < 0$ $\quad P(-1) = -21 < 0$

$P(-2) = -150 < 0$ $\quad P(2) = 30 > 0$

Usando o Resultado 6.3.1 (Teorema de Bolzano):

$$\begin{cases} P(0).P(-1) < 0 & \Rightarrow \text{Existe ao menos uma raíz real em } (-1,0) \\ P(0).P(1) > 0 & \Rightarrow \text{Existe ao menos uma raíz real em } (0,1) \\ P(1).P(2) < 0 & \Rightarrow \text{Existe ao menos uma raíz real em } (1,2) \end{cases}$$

O Teorema Fundamental da Álgebra garante que existem no máximo 3 raízes para P(x). Como (-1 , 0) , (0 , 1) e (1, 2) são intervalos disjuntos, pode-se dizer que:

$$S \subset (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2)$$

Resposta: Opção (a)

Exercício 6.12 $f(x) = a.x^2 + b.x + c$

Variando c: Variar o termo independente é equivalente a somar uma constante à função. Ou seja, alterando o valor de c, a função transladará na direção vertical.

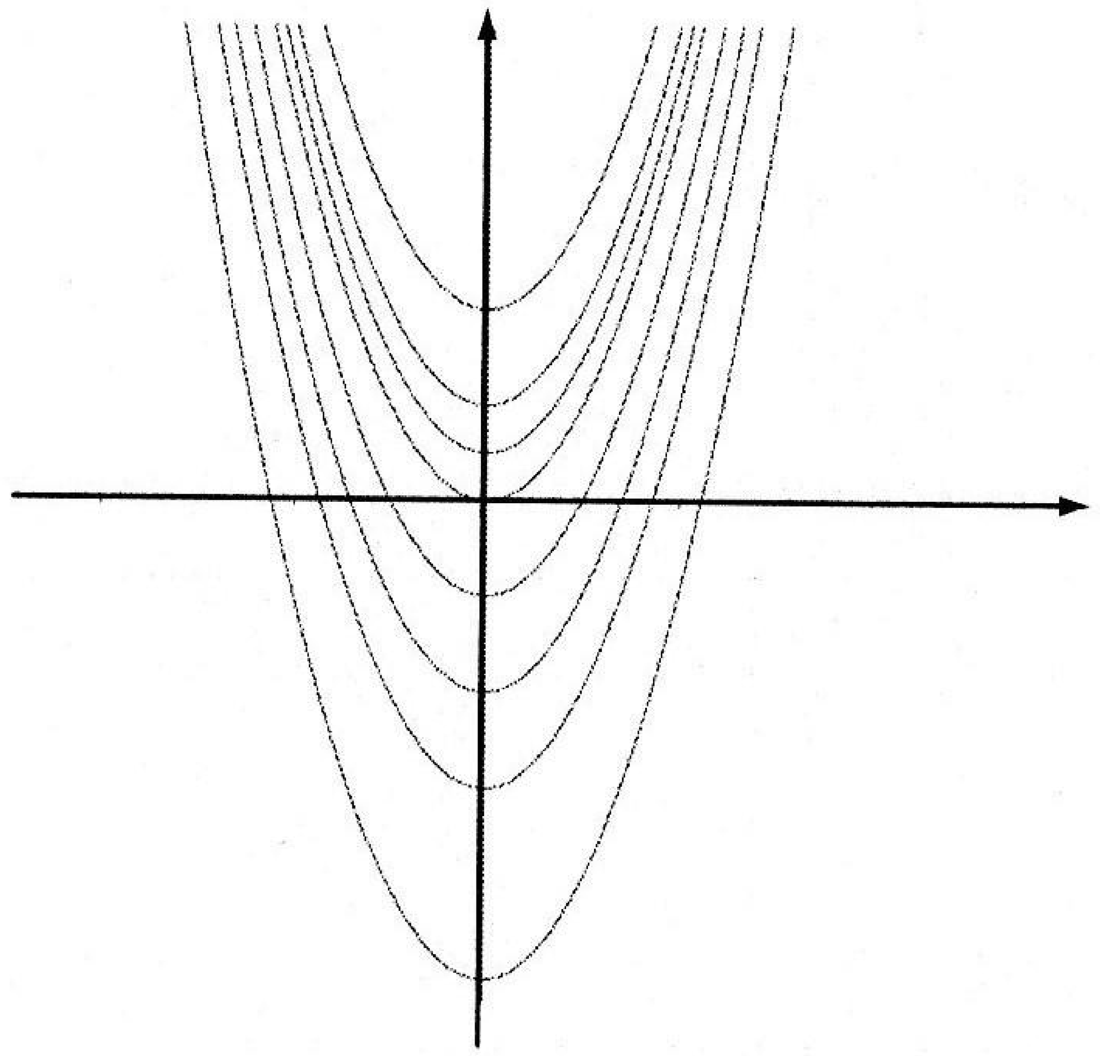


Fig. Ex-6. 12.a

Variando b: Como c é mantido constante, a função deve cortar o eixo das ordenadas sempre no mesmo ponto ao variarmos b. A concavidade da função se mantém, uma vez que a é constante. Alterando b, nós alteraremos a posição do vértice da parábola.

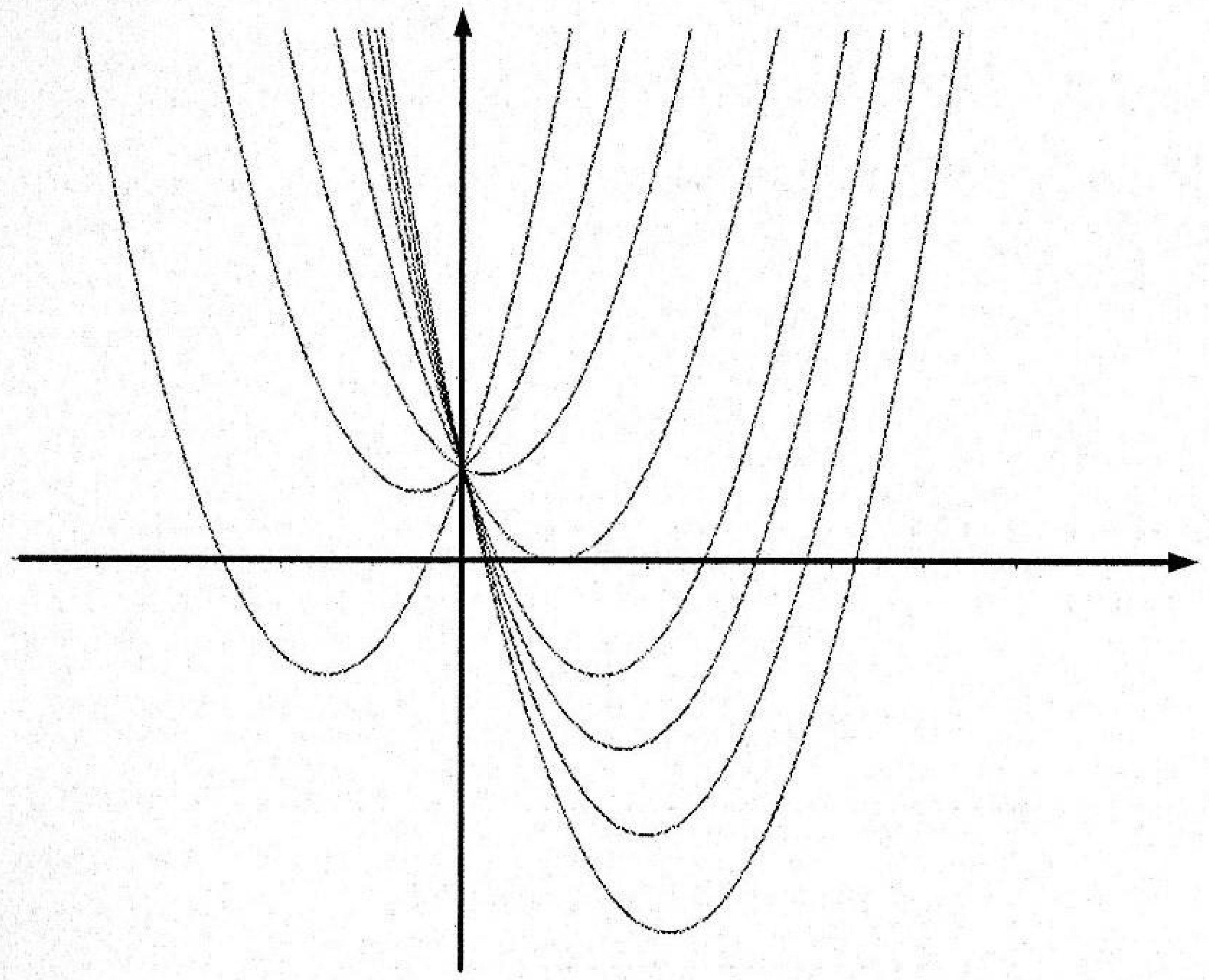


Fig. Ex-6. 12.b

Variando a: A derivada em x = 0 se mantém constante, portanto a inclinação da reta tangente à curva em x = 0 deve ser constante para todas as curvas. Como todas as curvas passam por (0,c), uma característica interessante dessa família de parábolas é que todas se tangenciam no ponto x = 0.

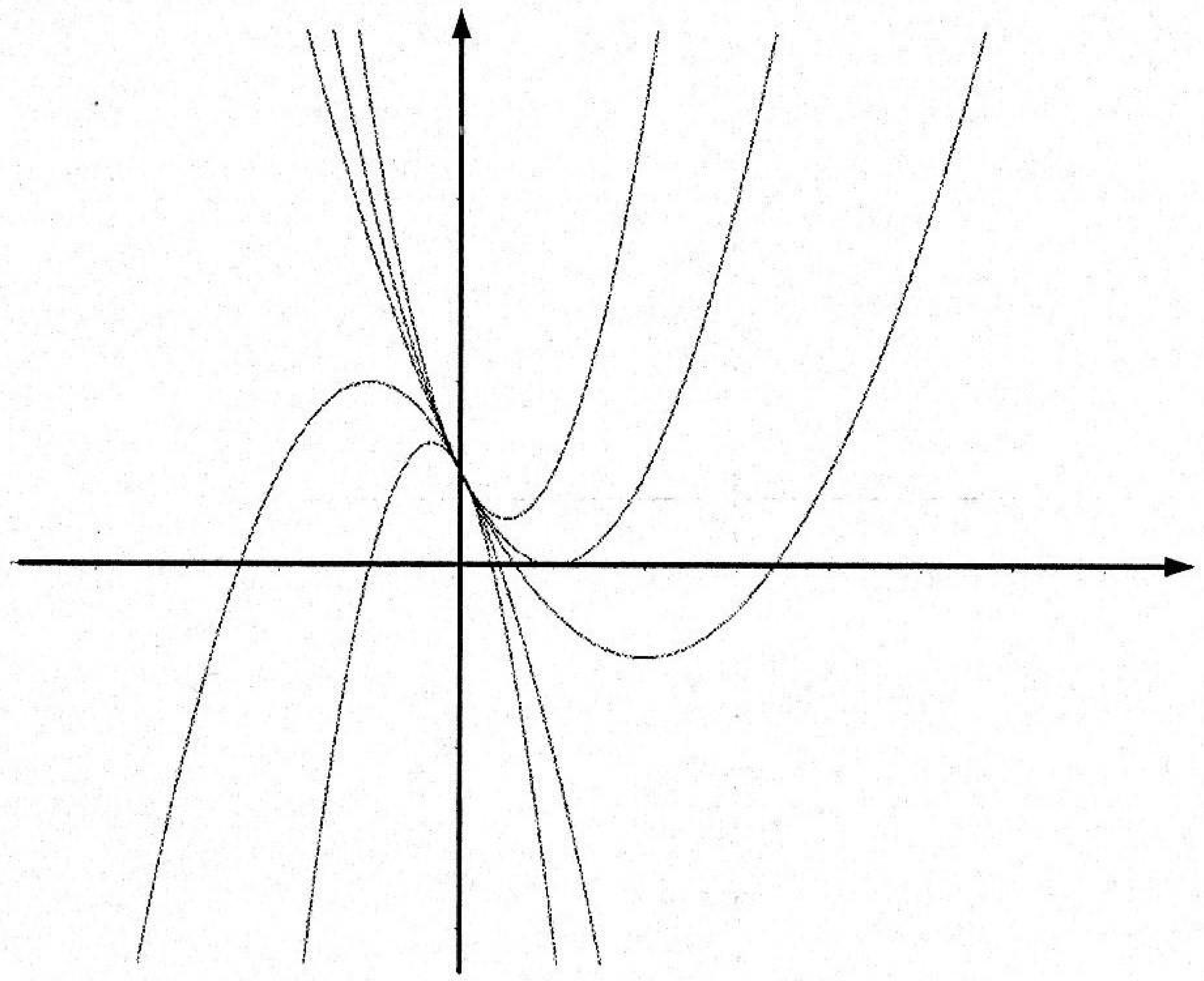


Fig. Ex-6. 12.c

Exercício 6.13 Para demonstrarmos a simetria da função em torno do eixo vertical $x = -b/2a$, basta mostrarmos que, qualquer que seja y real, teremos:

$$f\left(-\frac{b}{2a}-y\right)=f\left(-\frac{b}{2a}+y\right)$$

Vejamos:

$$f\left(-\frac{b}{2a}-y\right)=a.\left(-\frac{b}{2a}-y\right)^2+b.\left(-\frac{b}{2a}-y\right)+c$$
$$=\frac{b^2}{4a}+\cancel{b.y}+a.y^2-\frac{b^2}{2a}-\cancel{b.y}+c$$
$$=-\frac{b^2}{4a}+a.y^2+c$$

E, também:

$$f\left(-\frac{b}{2a}+y\right)=a.\left(-\frac{b}{2a}+y\right)^2+b.\left(-\frac{b}{2a}+y\right)+c$$
$$=\frac{b^2}{4a}-\cancel{b.y}+a.y^2-\frac{b^2}{2a}+\cancel{b.y}+c$$
$$=-\frac{b^2}{4a}+a.y^2+c$$

Ou seja, $f\left(-\frac{b}{2a}-y\right)=f\left(-\frac{b}{2a}+y\right)$, $\forall y \in \mathbb{R}$

Exercício 6.14 Uma das discussões da questão é em torno da existência de raízes reais. Analisemos o determinante da função f:

$$\Delta=(\ln 6)^2-4.\ln\frac{2}{3}.\left(-\frac{1}{4}.\ln\frac{3}{2}\right)$$
$$=(\ln 6)^2+(\ln 2-\ln 3).(\ln 3-\ln 2)$$
$$=(\ln 2+\ln 3)^2-(\ln 3-\ln 2)^2$$
$$=(\ln 2+\ln 3+\ln 3-\ln 2).(\ln 2+\ln 3-\ln 3+\ln 2)$$
$$=4.\ln 2.\ln 3$$

Note que $\Delta = 4.\ln 2.\ln 3 > 0$, o que nos diz que $f(x) = 0$ possui 2 raízes reais distintas.

A concavidade do gráfico é dada pelo sinal de a, $a = \ln(2/3) = \ln 2 - \ln 3 < 0$

Como o sinal de a é negativo, a concavidade do gráfico de f é para baixo. O valor máximo de f se dá, portanto, no seu vértice.

$$f_{max}=y_v=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{4.\ln 2.\ln 3}{4.(\ln 2-\ln 3)}=\frac{\ln 2.\ln 3}{\ln 3-\ln 2}$$

O que nos dá a opção correta:

Resposta: Opção (d)

Exercício 6.15

A função $f(x) = (x-1)^2$ é uma parábola com vértice em x = 1.

A função g(x) = x – a é uma reta com raiz em x = a. Aplicando o módulo de y, estaremos 'espelhando' todos os valores negativos de y para cima do eixo das abcissas.

Queremos que o gráfico das duas funções se encontrem em exatamente três pontos distintos. A figura abaixo mostra o gráfico de f(x) e g(x) (a última está representada para a = 0, a = 1 e a = 2).

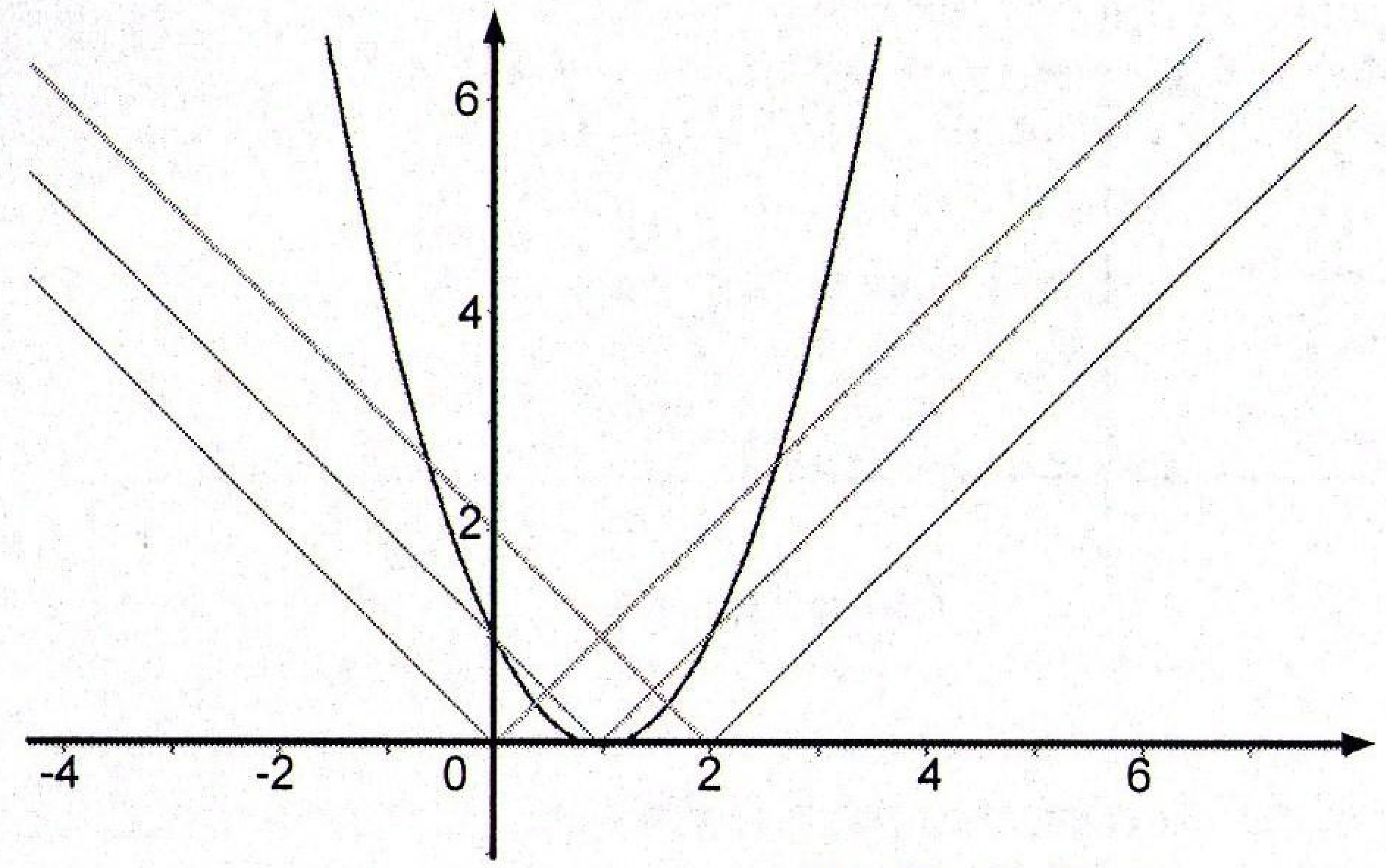


Fig. Ex-6. 15.a

Olhando para a figura acima vemos que para a = 1, temos 3 soluções distintas, enquanto que para os outros dois valores de a, temos apenas 2 soluções.

Não é difícil notar que existem também casos em que há 4 soluções distintas:

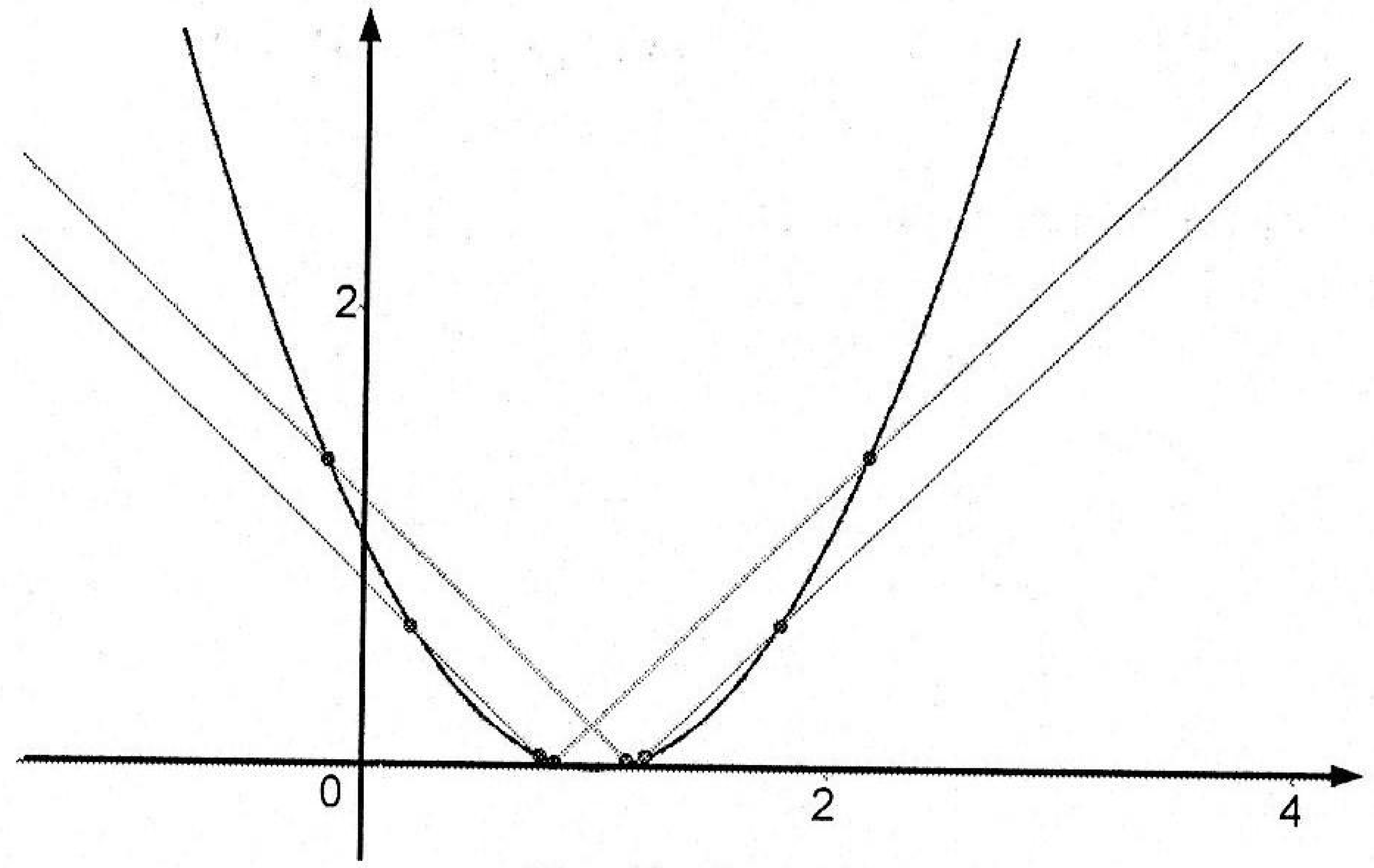


Fig. Ex-6. 15.b

E existem apenas 3 casos em que há 3 soluções distintas.

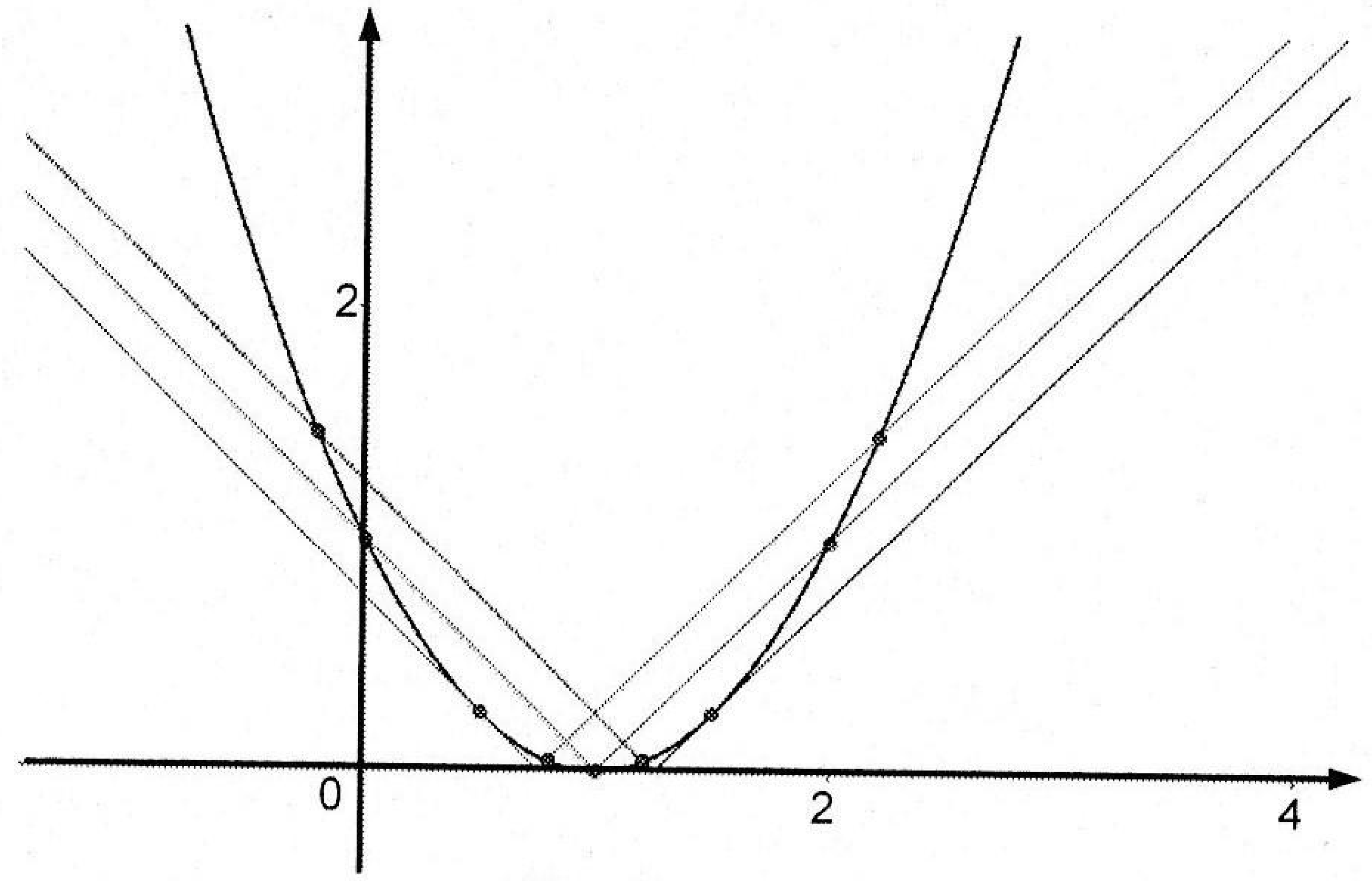


Fig. Ex-6. 15.c

Um dos casos é trivial, e o ocorre para a = 1.
Para determinar os outros dois valores, devemos achar **a** tal que g(x) tangencie f(x). No <u>primeiro caso</u>, o ramo esquerdo de f(x) tangencia g(x).

$$(x-1)^2 = -(x-a) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x + (1-a) = 0$$

Para que haja uma única solução, devemos ter o determinante da equação do 2° grau igual a zero.

$$\Delta = 1 - 4.(1-a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{4}$$

No <u>segundo caso</u>, o ramo direito de f(x) tangencia g(x).

$$(x-1)^2 = (x-a) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + (1+a) = 0$$

Novamente, para que a solução seja única:

$$\Delta = 9 - 4.(1+a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5}{4}$$

Logo, os valores de a que dão à equação exatamente três soluções distintas são:

$$\boxed{a \in \left\{\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 1\right\}}$$

Funções Trigonométricas em função da tangente do arco-metade

$$tgx = \frac{2.tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad senx = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Transformação de Soma em Produto

$$sena + senb = 2.sen\left(\frac{a+b}{2}\right).cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$sena - senb = 2.sen\left(\frac{a-b}{2}\right).cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\cos a + \cos b = 2.\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2.sen\left(\frac{a+b}{2}\right).sen\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Transformação de Produto em Soma:

$$sena.\cos b = \frac{1}{2}.\left[sen(a+b) + sen(a-b)\right]$$

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}.\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$sena.senb = \frac{1}{2}.\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

A.2 Cálculo - Gráficos

Definição e interpretação da Derivada

Considere uma função real contínua genérica, e um trecho seu representado pela figura abaixo:

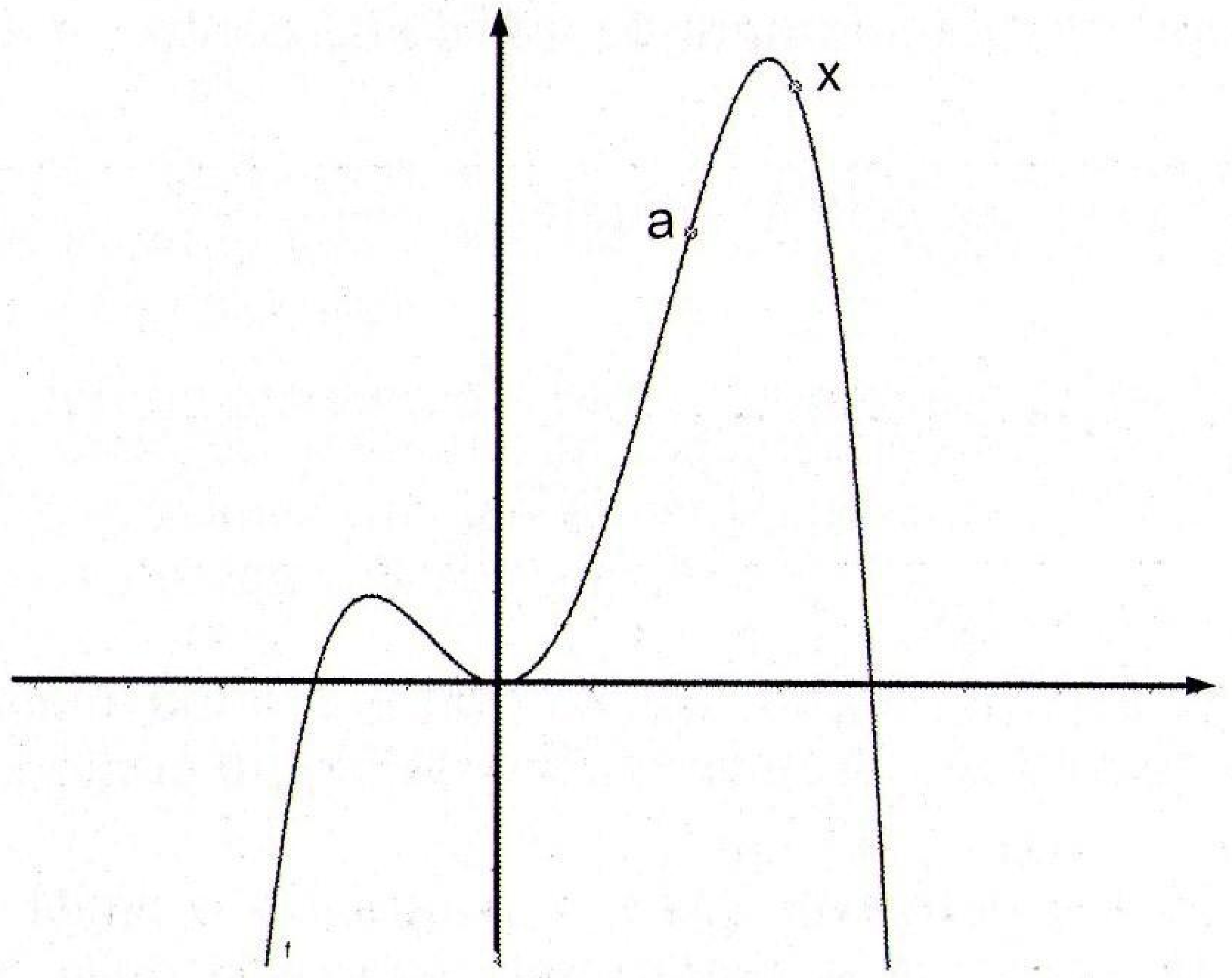


Fig. Apêndice 1

Na figura Ap1 acima, está representado um ponto *a* de seu domínio, e um outro ponto x genérico também pertencente ao gráfico de f. À medida que x se aproxima de *a*, veja o que acontece com a reta que liga os pontos x e *a* na sequência de figuras Ap2 a seguir:

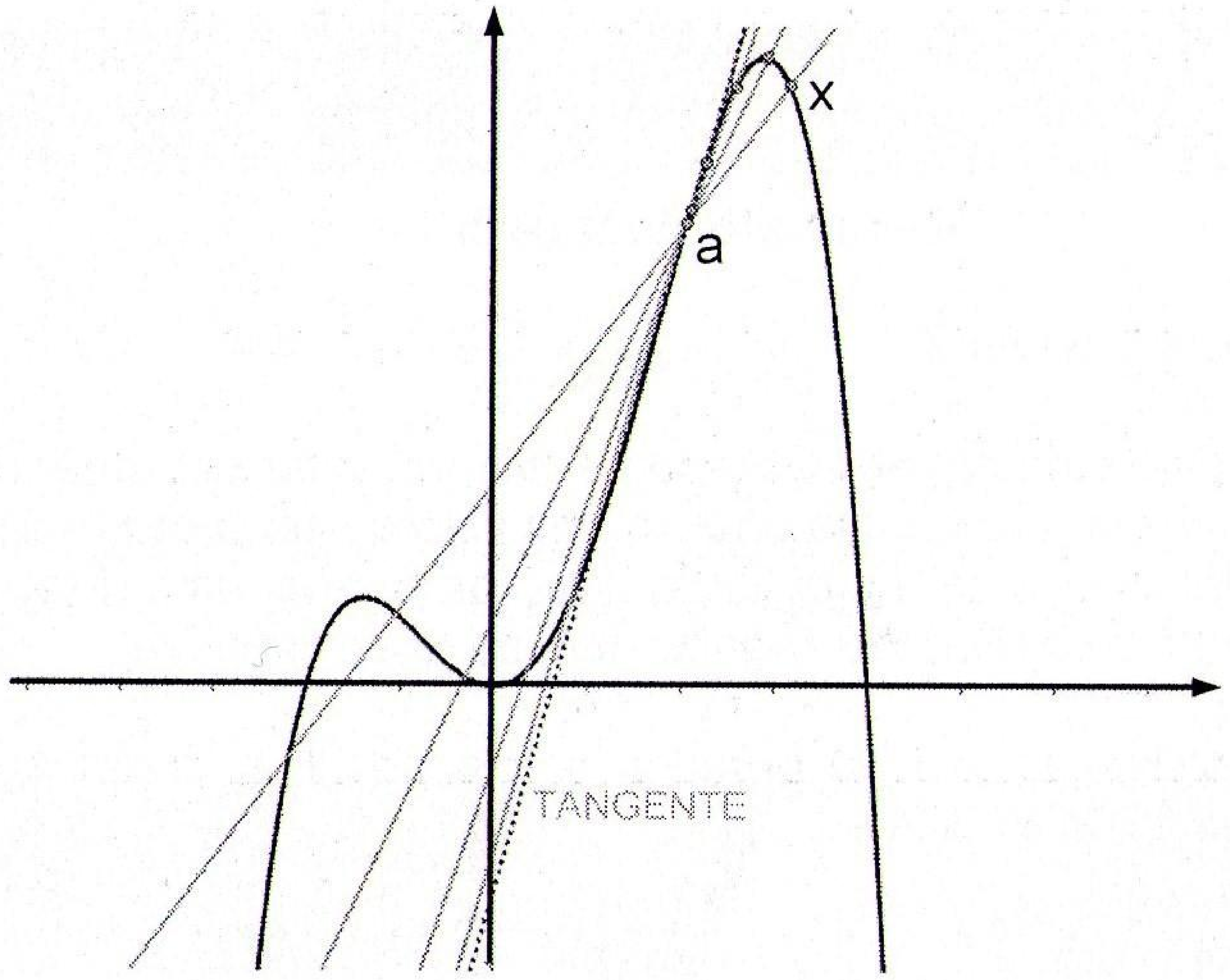


Fig. Apêndice 2

Apêndice

Apresentaremos aqui alguns resultados importantes mencionados no decorrer do livro (no quesito Trigonometria e Cálculo Diferencial e Integral). Por fugir do objetivo do livro, a maior parte das expressões aqui apresentadas não serão demonstradas. Em geral, as demonstrações dessas expressões podem ser facilmente encontradas em qualquer livro que aborde os assuntos destacados.

A.1 Trigonometria

Relações básicas no triângulo retângulo:

$$\text{sen}x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \quad \cos x = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$$

Definições básicas:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\text{sen}x}, \quad \text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}, \quad \text{ctg}x = \frac{1}{\text{tg}x}$$

Relações Fundamentais: $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\text{sen}^2x + \cos^2x}{\cos^2x} = \dfrac{1}{\cos^2x} \\ \dfrac{\text{sen}^2x + \cos^2x}{\text{sen}^2x} = \dfrac{1}{\text{sen}^2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\text{sen}^2x}{\cos^2x} + 1 = \dfrac{1}{\cos^2x} \\ 1 + \dfrac{\cos^2x}{\text{sen}^2x} = \dfrac{1}{\text{sen}^2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{tg}^2x + 1 = \sec^2x \\ 1 + \text{ctg}^2x = \csc^2x \end{cases}$$

Redução ao Primeiro Quadrante:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\text{sen}x$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\text{ctg}x$$

$$\text{sen}(\pi + x) = -\text{sen}(\pi - x) = -\text{sen}x \qquad \cos(\pi + x) = \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\text{tg}(\pi + x) = -\text{tg}(\pi - x) = \text{tg}x$$

Funções trigonométricos da soma de arcos.

$$\text{sen}(a+b) = \text{sena}.\cos b + \text{senb}.\cos a$$

$$\text{sen}(a-b) = \text{sena}.\cos b - \text{senb}.\cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \text{sena}.\text{senb}$$

$$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \text{sena}.\text{senb}$$

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tga} + \text{tgb}}{1 - \text{tga}.\text{tgb}}$$

$$\text{tg}(a-b) = \frac{\text{tga} - \text{tgb}}{1 + \text{tga}.\text{tgb}}$$

Arcos-Dobro e Arcos-Metade

$$\text{sen}(2x) = 2.\text{sen}x.\cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2x - \text{sen}^2x = 2.\cos^2x - 1 = 1 - 2.\text{sen}^2x$$

$$\text{tg}(2x) = \frac{2.\text{tg}x}{1 - \text{tg}^2x}$$

$$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(2x)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(2x)}{2}}$$

$$\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}}$$

Resultados Notáveis

Se x = a é um ponto de mínimo ou máximo (local ou absoluto), então f'(a)=0.
Se x = a é um ponto de inflexão, então f ''(a) = 0.

Resultado Apêndice.7

OBS Importante:
O Resultado Apêndice.7 é claramente uma afirmação do tipo "se... então". Isto indica a validade em uma direção da afirmação. A volta nem sempre é verdadeira, e é aí que mora o perigo!

Ou seja, o fato de f'(a) = 0 pode não significar que x = a é um ponto de mínimo ou máximo (como já vimos, pode se tratar de um ponto de inflexão horizontal.) O mesmo acontece com a segunda derivada. O fato de f ''(a) = 0 não significa, necessariamente, que x = a é um ponto de inflexão. De modo mais geral, o teorema a seguir (que não demonstraremos) nos ajuda a entender a situação um pouco mais amplamente.

Teorema Poderoso

Seja f derivável n+1 vezes em x = a tal que:

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n)}(a) = k \neq 0$$

Se n é par, e k < 0, então x = a é ponto de máximo.
Se n é par, e k > 0, então x = a é ponto de mínimo.
Se n é ímpar, então x = a é ponto de inflexão horizontal.

Resultado Apêndice.8

Como o conteúdo que precisaremos para a determinação de gráficos polinomiais já foi discutido, limitaremos aesse ponto a nossa discussão. Para mais informações sobre análise gráfica usando cálculo diferencial, procure um livro sobre o assunto (há bastante coisa interessante ainda a ser vista se você se interessou!)

A.3 Cálculo - Complemento

Teorema do Valor Intermediário (TVI)
Seja f uma função contínua no intervalo fechado [a,b], tal que, sem perda de generalidade, f(b) > f(a). Para qualquer que seja d tal que f(a) < d < f(b), existirá um real c no intervalo (a,b) tal que f(c) = d.

Teorema de Taylor
Se f é uma função derivável em uma vizinhança do ponto a, é possível aproximá-la de um polinômio infinito dependente das derivadas da funções nesse ponto.

Teorema de Rolle
Se f é contínua em um intervalo fechado [a,b] e derivável em (a,b), com f(a) = f(b) = 0, então existe um valor real c no intervalo (a,b) tal que f '(c) = 0.

Tabelas de Derivadas e Integrais Básicas

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)^n\right) = n.f(x)^{n-1}\frac{df(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)+g(x)\right) = \frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x).g(x)\right) = g(x).\frac{df(x)}{dx}+f(x).\frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{df(x)}{dx}-f(x).\frac{dg(x)}{dx}}{\left(g(x)\right)^2}$$

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t).dt\right)$$, onde a é uma constante real.

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)).\frac{dg(x)}{dx}$$

Derivadas de funções básicas:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x=\cos x \quad ; \quad \frac{d}{dx}\cos x=-\operatorname{sen}x$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg}x=\sec^2 x \quad ; \quad \frac{d}{dx}\operatorname{ctg}x=-\csc^2 x$$
$$\frac{d}{dx}\sec x=\sec x.\operatorname{tg}x \quad ; \quad \frac{d}{dx}\csc x=-\csc x.\operatorname{ctg}x$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{Arc}\cos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad \frac{d}{dx}\operatorname{Arcsen}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{Arctg}x=\frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad \frac{d}{dx}\operatorname{Arcctg}x=-\frac{1}{1+x^2}$$
$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x} \quad ; \quad \frac{d}{dx}e^x=e^x \quad ; \quad \frac{d}{dx}a^x=a^x.\ln a$$

Integrais imediatas:

$$\int x^n.dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad (n\neq -1)$$
$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+c$$
$$\int e^x.dx=e^x+c$$
$$\int a^x.dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$$
$$\int \operatorname{sen}x.dx=-\cos x+c$$
$$\int \cos x.dx=\operatorname{sen}x+c$$
$$\int \sec^2 x.dx=\operatorname{tg}x+c$$
$$\int \sec x.dx=\ln|\sec x+\operatorname{tg}x|+c$$
$$\int f(x).g'(x).dx=f(x).g(x)-\int f'(x).g(x).dx$$
$$\int f(x).dx=g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x).dx=g(b)-g(a)$$

Bibliografia

A seguir está uma lista de livros/materiais que foram utilizados como referência para a compilação adequada deste livro, e são altamente sugeridos para os vestibulandos IME/ITA.

[1] Morgado, A ; Pitombeira de Carvalho, J.B.; Pinto Carvalho, P.C.; Fernandez,P. ***Análise Combinatória e Probabilidade***. Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

[2] Lidski, V.B.; Ovskianikov, L.V; Tulaikov, A.N; Shabunin, M.I.. ***Problemas de Matemática Elementares***. Moscou MIR.

[3] Spiegel, M.R. ***Variáveis Complexas.*** Coleção Shaum.

[4] Netto, Sergio Lima. ***Provas do Vestibular do IME.*** Site: www.lps.ufrj.br/profs/sergioln/ (acessado em Setembro 2008).

A reta (que cortava o gráfico) se aproxima, cada vez mais da reta tangente ao gráfico de f no ponto *a*.

Nota-se então, que o coeficiente angular da reta que cortava o gráfico em 2 pontos distintos em uma vizinhança do ponto *a*, está cada vez mais próximo do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico no ponto x = a.

$$m(x) = \text{coeficiente angular} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

A derivada de uma função real f(x) no ponto a é definida como:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Em outras palavras, a derivada de f(x) no ponto *a* nada mais é do que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f(x) no ponto x = a.

Dizemos que função f é derivável em x = a quando o limite acima existe (tanto abordado pela direita de a quanto pela esquerda de a, sendo ambos iguais). Esse limite pode ser denotado das seguintes formas:

$$\frac{df}{dx}(a)\ ,\ f'(a)\ ,\ f'(x)\big|_{x=a}$$

Teorema

Se uma função é derivável em x = a, então a função é contínua em x = a.

Resultado Apêndice.1

Teste da Primeira Derivada

Uma função é dita estritamente crescente em um intervalo quando, nesse intervalo, para valores crescentes de x, temos valores cada vez maiores de f. Intuitivamente falando, fica fácil notar que, para que uma função esteja sempre crescendo, o coeficiente angular dela deve ser positivo.

De fato, se a derivada de f no ponto x = a é positiva, então a função é estritamente crescente em x = a.

$$\begin{cases} x > a \\ f'(a) > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{\underbrace{x - a}_{>0}} > 0 \Rightarrow f(x) > f(a)$$

Teorema

Seja f(x) uma função derivável no ponto x = a. Se f '(a) > 0 , então f é estritamente crescente em x = a . Se f '(a) < 0 , então f é estritamente decrescente em x = a.

Resultado Apêndice.2

Ora, se uma função derivável em *a* não for nem estritamente crescente nem estritamente decrescente em x = a (é o caso em que sua derivada é nula), seu gráfico terá inclinação nula.

Tais pontos (nos quais a derivada de f se anulam) são chamados de **pontos críticos** de f. Os pontos críticos podem representar *máximos* e *mínimos locais* ou até mesmo *pontos de inflexão*.

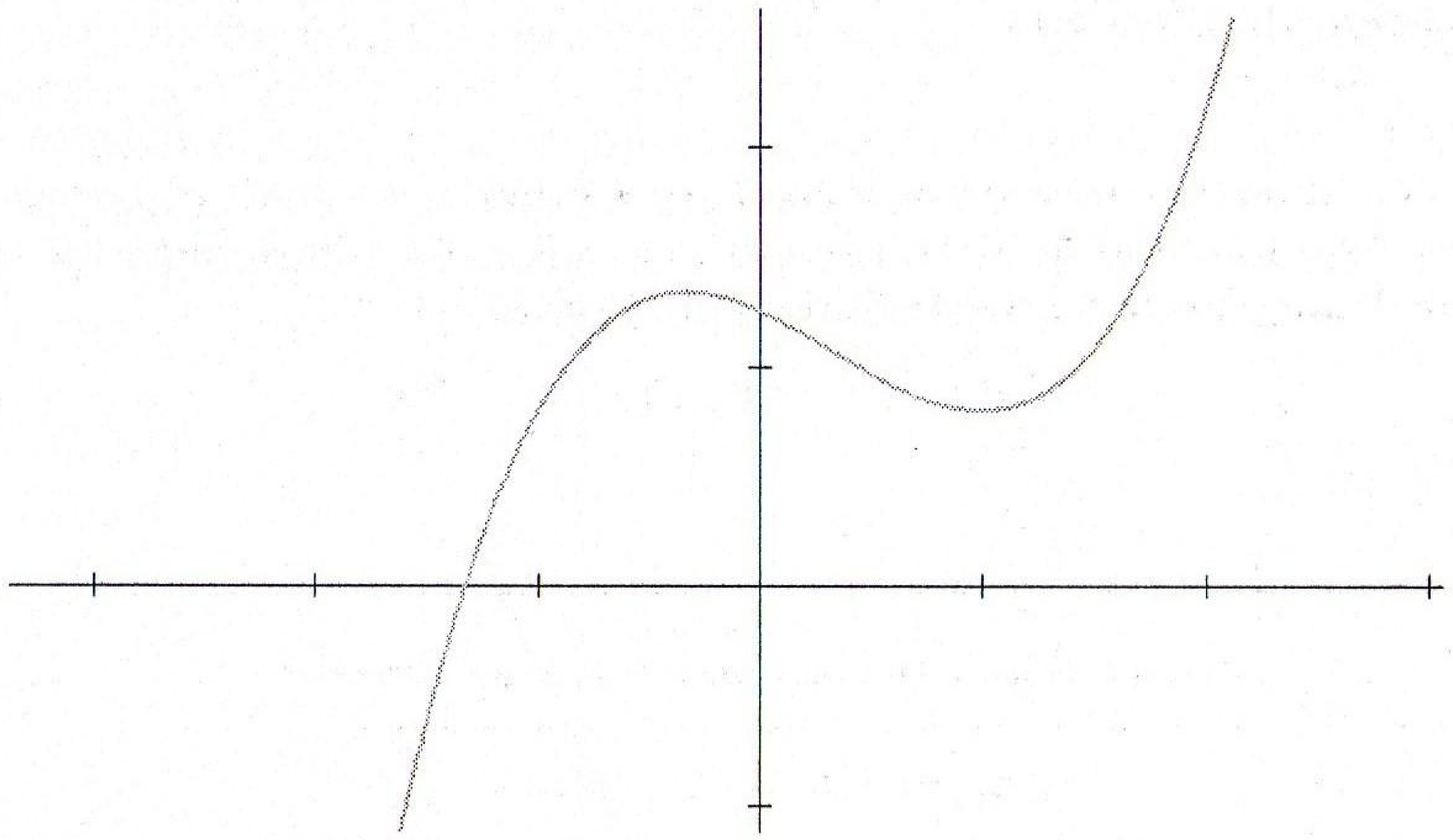


Fig. Apêndice 3

O fato de f possuir derivada nula em um ponto x = a, não nos permite ainda determinar qual dentre as 3 possibilidades está ocorrendo.

Teorema

Seja f possui um ponto de máximo ou mínimo (local ou absoluto) em x = a, então f '(a) = 0.

Resultado Apêndice.3

Um bom critério de distinção entre máximos e mínimos de uma função pode ser feito com base no teste da 1ª derivada.

Teorema

Seja f uma função derivável em x = a e k um ponto tomado próximo de a.

Se f ' (a) = 0, f' (k) < 0 para k < a , e f'(k) > 0 para k > a , então x = a é um ponto de mínimo local.

Se f ' (a) = 0, f' (k) > 0 para k < a , e f'(k) < 0 para k > a , então x = a é um ponto de máximo local.

Resultado Apêndice.4

Teste da Segunda Derivada

Dizemos que uma curva tem concavidade para cima, quando, a medida que percorremos os valores crescentes de x na função, as retas tangentes em cada ponto possuem uma inclinação cada vez maior. Se a inclinação for cada vez menor, dizemos que a concavidade é para baixo.

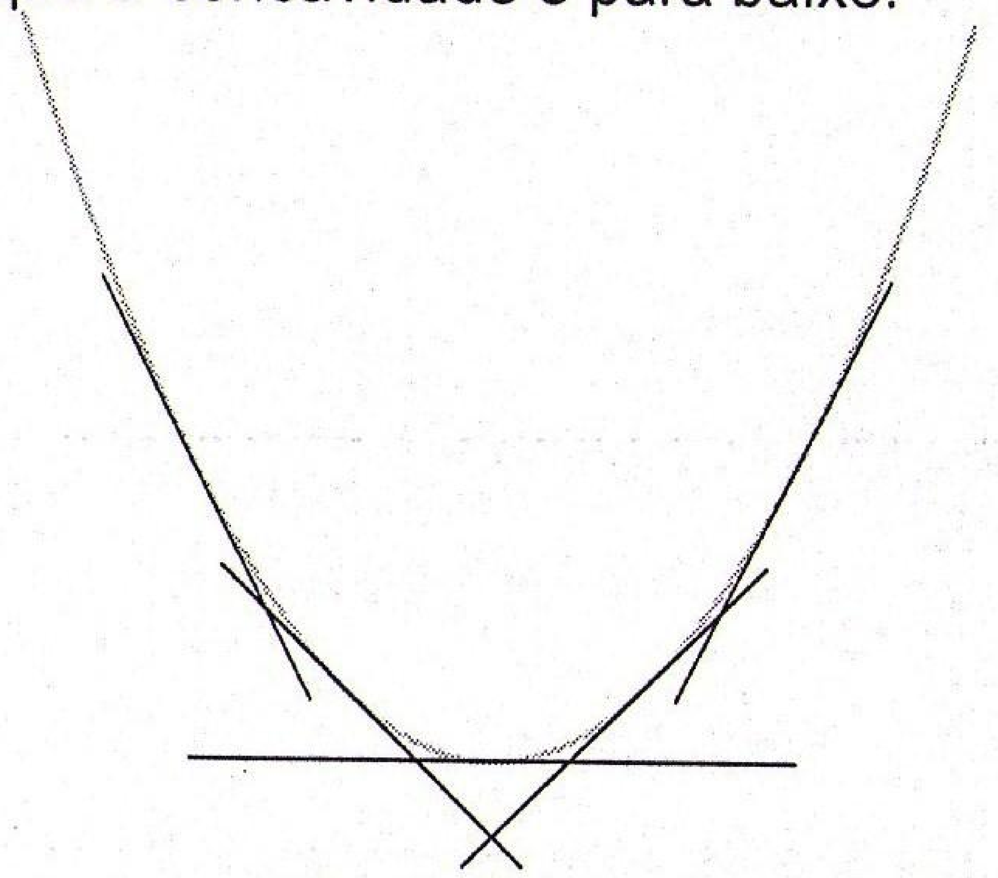


Fig. Apêndice 4

Um critério para determinar se a concavidade em certo ponto da função é para cima ou para baixo pode ser facilmente determinado. A função que nos dá a inclinação da reta tangente em cada ponto de f é justamente sua derivada f '(x). Se quisermos que essa função seja estritamente crescente, basta aplicarmos o Resultado Apêndice.2 sobre a função f'(x). Ou seja, o sinal da derivada de f '(x), (a segunda derivada de f, f") nos dará o tipo de concavidade da curva em cada ponto.

Teorema

Seja f(x) uma função derivável no ponto x = a. Se f "(a) > 0 , então f é tem concavidade para cima em x = a . Se f "(a) < 0 , então f tem concavidade para baixo em x = a.

Resultado Apêndice.5

Ora, se a função muda de concavidade, haverá um ponto no qual a concavidade não é nem para cima, e nem para baixo. É justamente o ponto de mudança de sinal da 2ª derivada (é o ponto em que f "(x) = 0). A esse ponto damos o nome de **ponto de inflexão**.

Se além da segunda derivada nula em x = a, a primeira derivada da função também se anular no mesmo ponto, além da mudança de concavidade acontecer no ponto *a*, temos que a reta tangente à curva em *a* é horizontal (não possui inclinação). Chamamos esse tipo de ponto de **ponto de inflexão horizontal.**

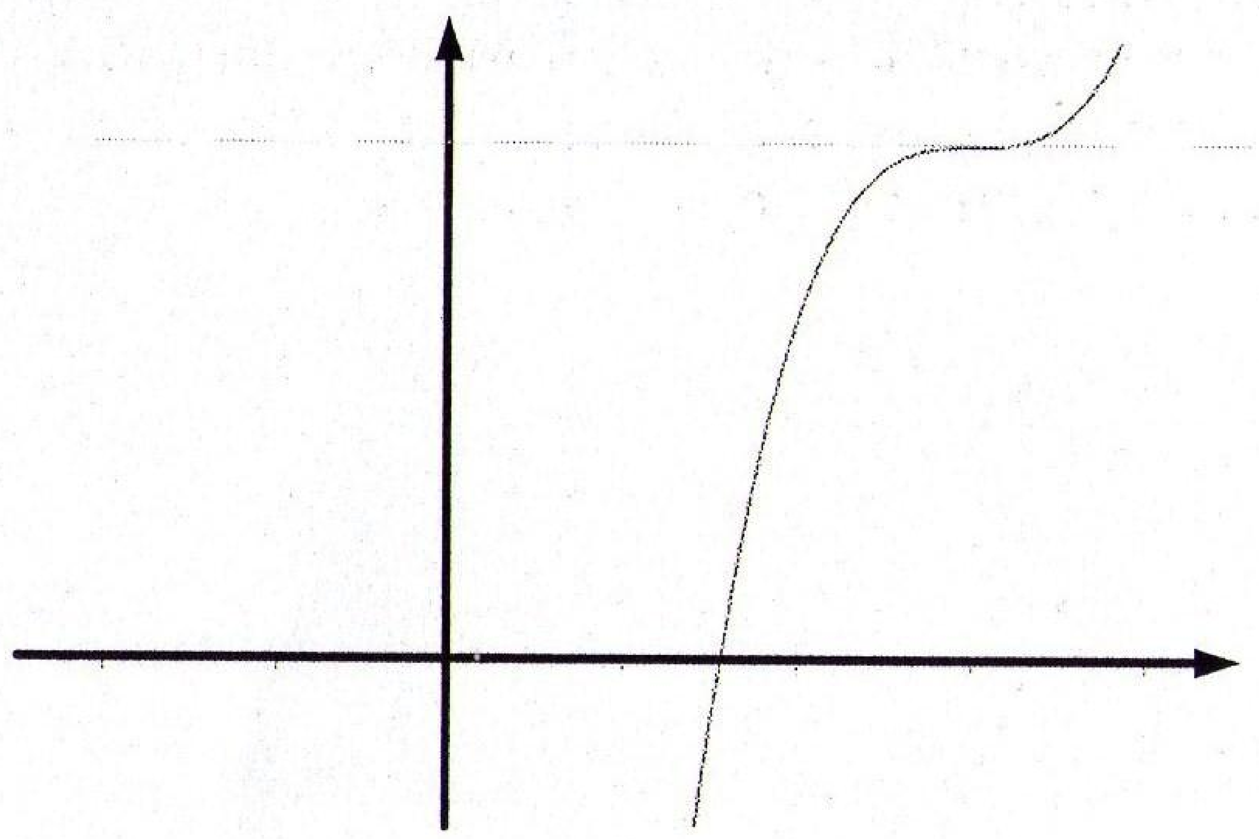


Fig. Apêndice 5

Um outro bom critério de distinção entre máximos e mínimos de uma função pode ser feito, agora com base no teste da 2ª derivada.

Teorema

Seja f uma função derivável 2 vezes em x = a.
Se f ' (a) = 0 e f "(a) > 0 , então x = a é um ponto de mínimo local.
Se f ' (a) = 0 e f "(a) < 0 , então x = a é um ponto de máximo local.
Se f ' (a) = 0 e f "(a) = 0 , então x = a é um ponto de inflexão horizontal.

Resultado Apêndice.6

Tome o seguinte procedimento:

i) Dê um chute inicial para o intervalo [a,b] de uma função f contínua
ii) Calcule f(a) e f(b), e calcule também o produto f(a).f(b)
iii) Se f(a).f(b) = 0 , temos de imediato que a ou b (ou ambos) é raiz de f.
iv) Se f(a).f(b) < 0, temos que f(a) e f(b) têm sinais contrários. Caímos então no Teorema de Bolzano, e sabemos que existe uma raiz entre a e b. Podemos tomar agora um novo intervalo [c,d] contido em [a,b] e repetir o processo de busca até encontrarmos uma vizinhança bem restrita contendo a raiz.
v) Se f(a).f(b) > 0, não estamos na condição do teorema de Bolzano. Chutamos, então, um outro intervalo [a,b] para a busca.

O procedimento acima parece ser um processo bastante cansativo para chegar até uma raiz de um polinômio. Porém, computadores potentes fazem a rotina descrita em muito pouco tempo. Acabamos de mostrar como criar um algoritmo numérico de determinação de raízes de funções contínuas!

Na verdade nós também já usamos o Teorema de Bolzano. Refira-se novamente aos exercícios 6.1.c e 6.1.d e identifique em que momento foi usado o raciocínio do Teorema de Bolzano.

Extensão do Teorema de Bolzano

Mais interessante do que o teorema de Bolzano em si, é a extensão do mesmo que veremos agora. Considere as mesmas condições de hipótese que as do teorema.

Se f(a).f(b) > 0, sabemos que f(a) e f(b) têm o mesmo sinal, e portanto estão situadas no mesmo semiplano com referência ao eixo das abcissas y = 0 (pode ser que ambas estão abaixo de y = 0 ou ambas acima de y = 0). Como a função é contínua, podemos ter algumas possibilidades como as ilustradas a seguir:

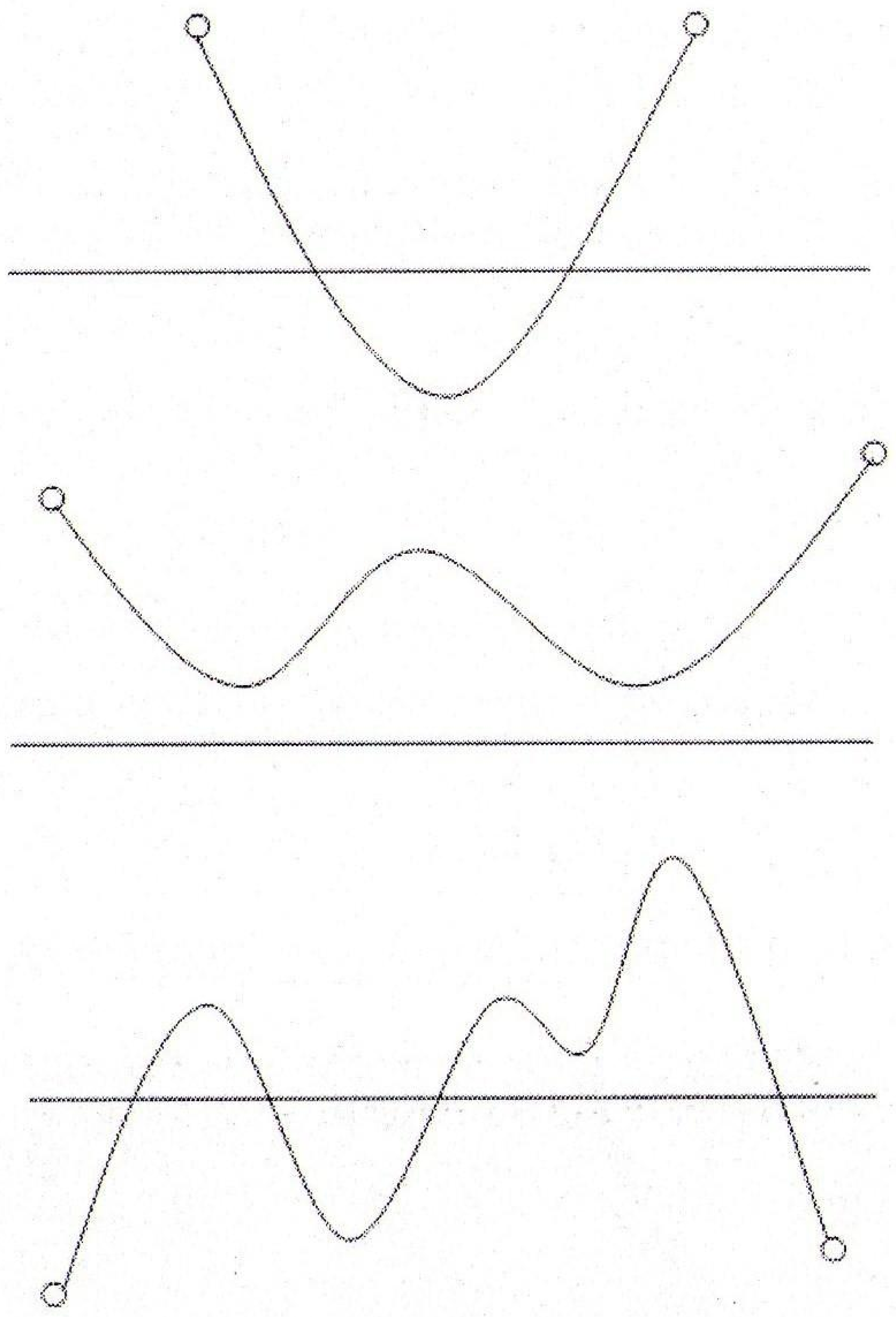
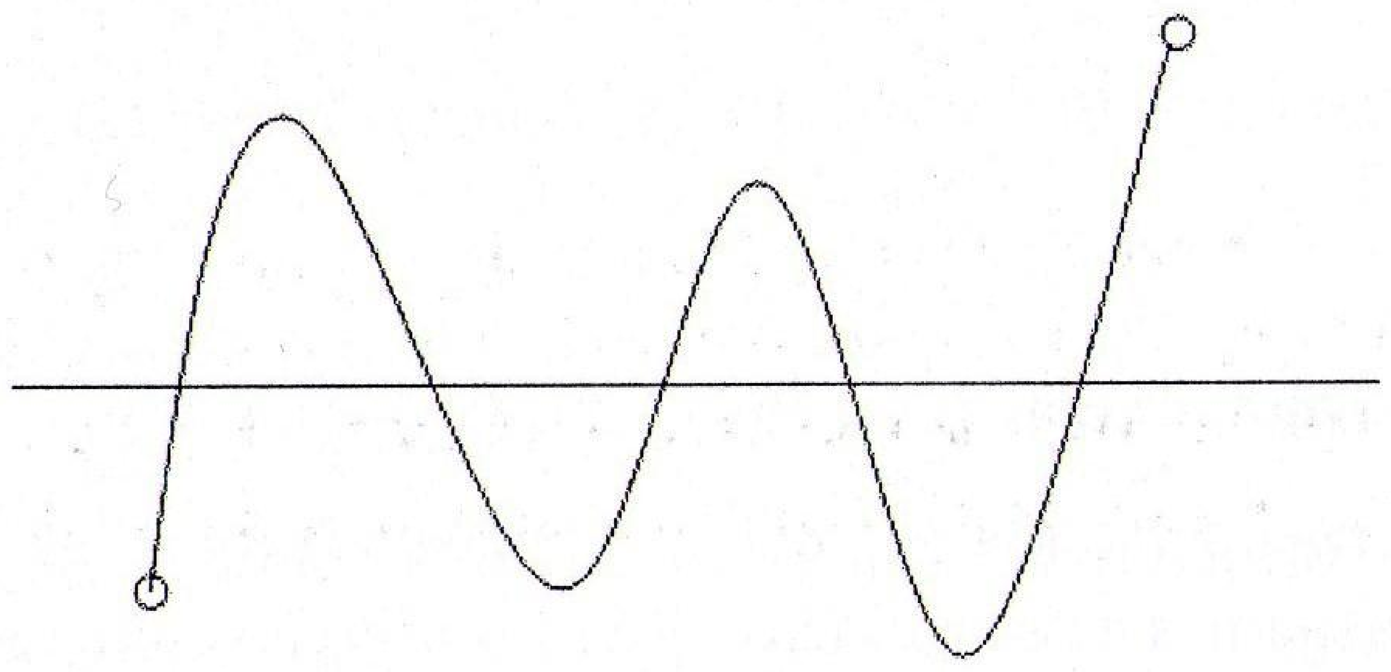


Fig. 6.3.1

Podemos generalizar todas as possibilidades dizendo que, se f(a).f(b) > 0, a função cruza um número par de vezes (ou nenhuma vez) o eixo Ox. Interessante, não?

No caso em que f(a).f(b) < 0, teremos algumas possibilidades, entre as quais:



2.1 O Complexo como Vetor

Rotação

Já vimos que cada número complexo tem uma representação vetorial no plano complexo de Argand-Gauss. Vamos explorar um pouco mais esse tipo de representação!

Da *Fórmula 1.5.1*, temos que a multiplicação entre dois complexos é feita da seguinte forma:

$$\begin{cases} z = r.\text{cis}x \\ w = s.\text{cis}y \end{cases} \Rightarrow z.w = (r.s).\text{cis}(x+y)$$

Então, imaginemos um vetor representante de $z = r.\text{cis}\theta$ no plano complexo. Que representação geométrica resulta se multiplicarmos z por um complexo $w = \text{cis}\alpha$?

$$z.w = (r.\text{cis}\theta).(\text{cis}\alpha) = r.\text{cis}(\theta+\alpha)$$

O resultado é justamente um complexo similar ao complexo z original, porém rotacionado de um ângulo α no sentido trigonométrico.

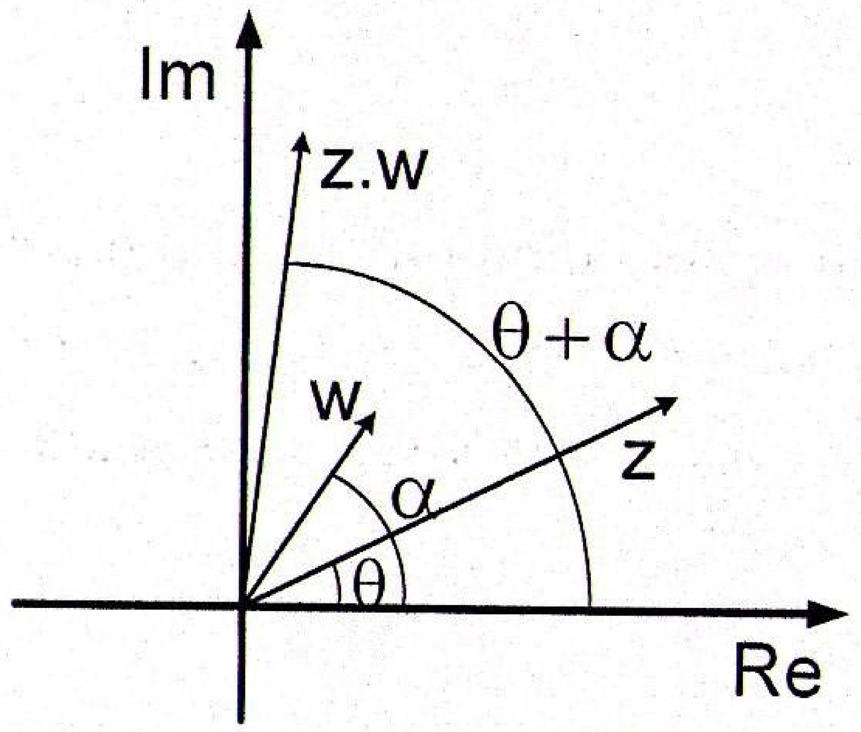


Fig. 2.1.1

Note que o comprimento do resultado da multiplicação é o mesmo comprimento de z.

Como seria o resultado da multiplicação de z por $u = 2\text{cis}\alpha$?

$$z.u = (r.\text{cis}\theta).(2.\text{cis}\alpha) = 2.r.\text{cis}(\theta+\alpha)$$

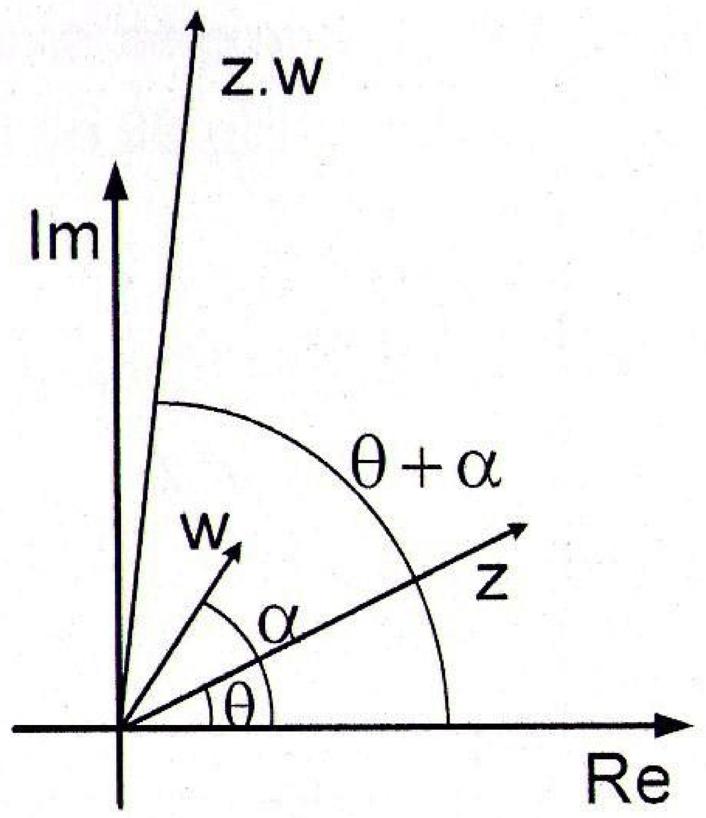


Fig. 2.1.2

Note que o comprimento do resultado da multiplicação agora é o dobro do comprimento de z. Tudo isso está coerente e faz sentido, uma vez que:

$$\begin{cases} z = r.\text{cis}x \\ w = s.\text{cis}y \end{cases} \Rightarrow z.w = (r.s).\text{cis}(x+y)$$

A multiplicação de um complexo $z = |z|.\text{cis}(\arg z)$ por $w = |w|.\text{cis}(\arg w)$ dá um resultado com representante vetorial de módulo igual ao módulo do complexo original z "ampliado" em $|w|$ vezes, rotacionado de um ângulo igual a arg(w) no sentido trigonométrico.

Obviamente, a divisão de complexos também terá uma característica de rotação. Uma vez que: $(\text{cis}\theta)^{-1} = \text{cis}(-\theta)$, a rotação devido à divisão corresponde a um giro no sentido anti-trigonométrico (sentido horário).

O módulo do vetor representante do resultado da divisão de $z = |z|.\text{cis}(\arg z)$ por $w = |w|.\text{cis}(\arg w)$ será, nesse caso, o comprimento $|z|$ "dividido" em $|w|$ vezes.

Conclusão importante:
Multiplicar um número complexo por i significa rotacioná-lo 90° no sentido anti-horário.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -10 = a - 1 \\ 29 = b - a \\ -20 = -b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = 20 \end{cases}$$

Ou seja: $x^3 - 10.x^2 + 29.x - 20 \equiv (x-1).(x^2 - 9x + 20)$

Concluímos então que as demais raízes de P(x) são raízes do polinômio:

$$Q(x) = (x^2 - 9x + 20)$$

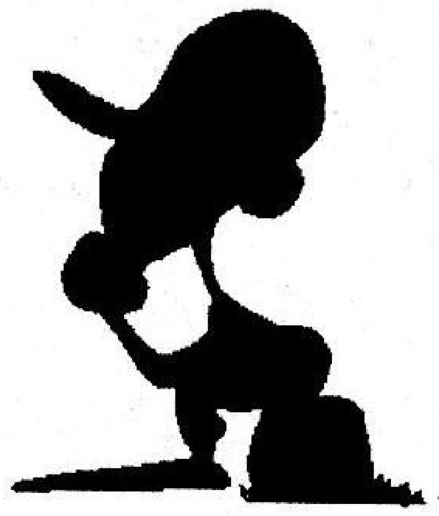
Utilizando o método de Báskara para a resolução:

$$x^2 - 9x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2}$$

O que nos dá as raízes: 5 e 4. Ou seja, as raízes do polinômio P(x) são:

1, 4, 5

> Será que existe um jeito mais fácil de obter o polinômio Q(x)? Ou seja, dado que conhecemos uma raiz de um polinômio, e fatoramos o polinômio pelo método de D´Alembert, existe alguma maneira mais prática de achar os demais fatores?



Dado que conhecemos uma das raízes do polinômio P(x), o problema de determinar as demais raízes se reduz a encontrar o polinômio que possui os demais fatores de P(x). Ou seja, dado P(x) e k como sendo uma de suas raízes conhecidas, desejamos encontrar Q(x) tal que:

$$P(x) = (x-k).Q(x)$$

A pergunta do nosso amigo acima é interessante. Ora, Q(x) nada mais é do que o quociente da divisão de P(x) por (x – k). Ou seja, podemos utilizar o algoritmo da divisão algébrica.

Algoritmo de Briot-Ruffini (Redução de Grau de um Polinômio)

O problema de determinar Q(x) é resolvido por uma simples Divisão Algébrica. Porém, existe um algoritmo simplificado para se fazer essa "continha" de divisão algébrica por um termo do tipo (x – k). Esse algoritmo simplificado é conhecido como Algoritmo de Briot-Ruffini. Tal algoritmo, que será detalhado a seguir, é também conhecido como Algoritmo de Redução de Ordem do polinômio, uma vez que conhecendo uma de suas raízes, o polinômio que possui os demais fatores (Q(x) no nosso exemplo) é um polinômio com grau uma unidade menor que o de P(x). Vamos ilustrar a divisão com um exemplo: $(P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3) \div (x - 2)$

Algoritmo de Briot-Ruffini:

1º Passo: Escrevemos, da maneira como está escrito a seguir, os coeficientes do polinômio dividendo. Abaixo da linha horizontal, à esquerda, escrevemos o número k, do fator (x – k) da divisão a ser feita (no nosso exemplo, k = 2). O primeiro termo do polinômio dividendo é repetido logo ao lado direito de k.

	1	2	-1	3
2	1			

2º Passo: Multiplicamos o número k (no nosso caso k = 2) pelo primeiro número abaixo da linha horizontal (no nosso exemplo, devemos fazer 2.1 = 2). A esse resultado somamos o próximo termo acima da linha horizontal (no nosso exemplo, esse termo também é 2 (chegando, no nosso exemplo, ao resultado: 2 + 2 = 4).

	1	2	-1	3
2	1	= 4		

+ ×

Exemplo 5.3.e (IME - adaptada) Seja P(x) um polinômio do 4º grau, em x, cujo coeficiente do termo de maior grau é 1 e cujas raízes são racionais. Adicionando-se 3/4 e 3 a essas raízes obtém-se transformadas de P(x) = 0 desprovidas do termo de 3º grau de do 1º grau, respectivamente. Determine P(x), sabendo-se que ele possui duas raízes iguais e que P'(0) = -15.

Solução: Seja $P(x) = x^4 + a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$

Derivando o polinômio P(x) com relação a x:

$$P'(x) = 4.x^3 + 3.a.x^2 + 2.b.x + c$$

Do enunciado, P'(0) = -15:

$$P'(0) = c = -15$$

Calculemos as derivadas de 2ª, e em seguida de 3ª ordem de P(x).

$$P''(x) = 12.x^2 + 6.a.x + 2.b$$
$$P'''(x) = 24.x + 6.a$$

Do Resultado 5.3.1, sabemos que as constantes −3/4 e −3 anularão P'''(x) e P'(x), respectivamente. Portanto:

$$\begin{cases} P'''\left(-\dfrac{3}{4}\right) = -24.\dfrac{3}{4} + 6.a = 0 \\ P'(-3) = 4.(-3)^3 + 3.a.(-3)^2 + 2.b.(-3) - 15 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, temos: a = 3 e b = −7. Sabemos então que:

$$P'(x) = 4.x^3 + 9.x^2 - 14.x - 15$$

Já conhecemos uma das raízes de P'(x), pois P'(−3) = 0. Utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini, para achar as demais raízes de P'(x):

	4	9	-14	-15
-3	4	-3	-5	0

Portanto, as outras duas raízes de P'(x) serão as raízes de $4.x^3 - 3x - 5 = 0$, que são irracionais.

Ora, mas se P(x) possui raiz dupla, esta raiz deverá ser raiz também de P'(x). Como todas as raízes de P(x) são racionais, a raiz dupla também deverá ser.

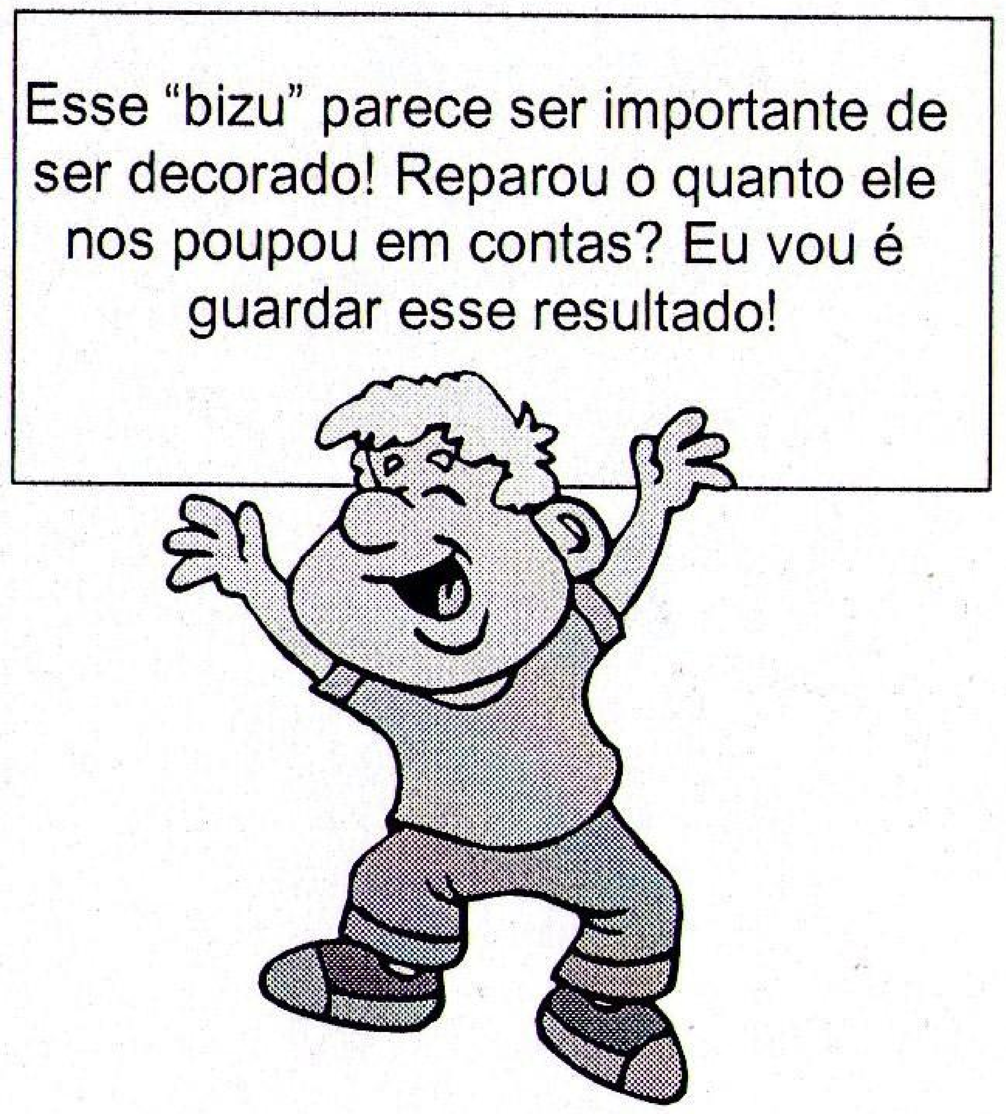
Como −3 é a única raiz racional de P'(x), sabemos que esta deve ser a própria raiz dupla de P(x).

Ou ainda:

$$P(-3) = 0 \Rightarrow (-3)^4 + 3.(-3)^3 - 7.(-3)^2 - 15.x + d = 0 \quad \therefore \quad d = 18$$

Com isso, podemos escrever o polinômio P(x):

$$P(x) = x^4 + 3.x^3 - 7.x^2 - 15.x + 18$$



Solução Geral da Equação do 3º Grau (Método de Cardano-Tartaglia Generalizado)

Acabamos de ver uma grande utilidade para a Transformada Aditiva. Sabemos como, utilizando este tipo de transformada, eliminar certos termos de uma equação polinomial. Este fato nos permitirá agora resolver analiticamente qualquer equação do 3º grau. Achemos as raízes da equação: $x^3 + p.x^2 + q.x + r = 0$.

Conhecemos a solução analítica para equações do 3º grau desprovidas do termo do 2º grau (ver solução de Cardano-Tartaglia, Resultado 4.2.1). Então façamos com que este termo de 2º grau desapareça, utilizando uma transformada aditiva, para uma equação cúbica genérica.

$$P'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Do Resultado 6.1.4, temos que P(x) é estritamente crescente em toda reta real.

Ora, como a função é estritamente crescente, se ela cruza uma vez o eixo Ox, ela não cruzará novamente. Como já foi garantido de que existia um cruzamento, acabamos de garantir que este cruzamento é único!

Boa pergunta! A resposta se resume basicamente à discussão final do Apêndice A.2. Como consequência direta do Teorema Apêndice.8, segue:

Seja P um polinômio no qual x = k é uma raíz múltipla de multiplicidade n. Ou seja:

$$P(k) = P'(k) = P''(k) = P'''(k) = \ldots = P^{(n-1)}(k) = 0 \quad e \; P^{(n)}(k) \neq 0$$

Se n é par, então x = k é um ponto de máximo ou mínimo local.
Se n é ímpar, então x = k é ponto de inflexão horizontal (n > 1)

Resultado 6.1.6

Veja o resultado 6.1.6 ao analisar a representação gráfica do polinômio:

$$P(x) = \frac{1}{10}(x-1)^2.(x+3)^3.(x+1)$$

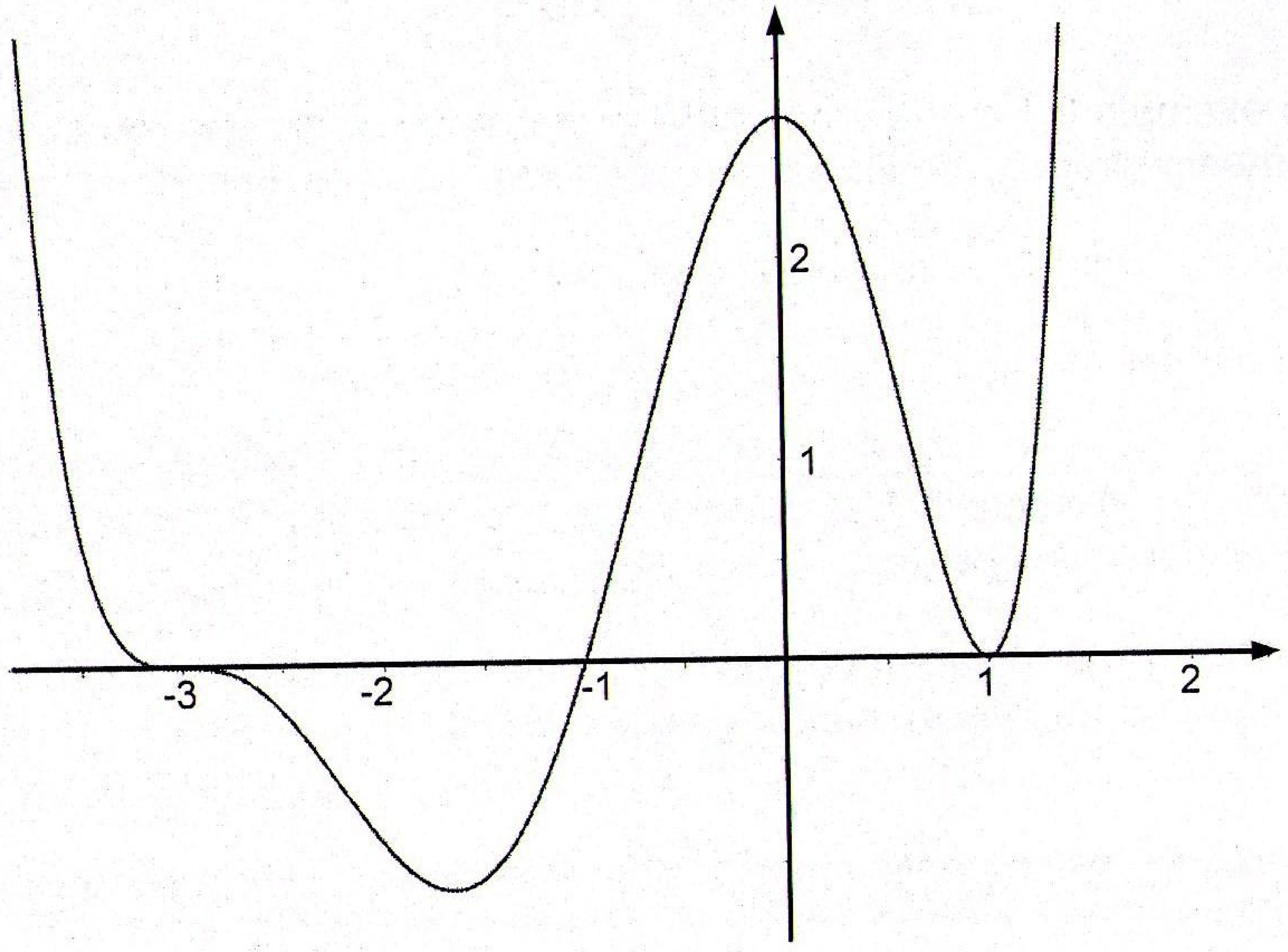


Fig. 6.1.4

Exemplo 6.1.d Sabe-se que o polinômio a seguir possui uma raiz natural. Determine-a. É possível dizer se existe mais alguma raiz real positiva ?

$$P(x) = (x-1)^3.(x+1) - 32$$

Solução:

Desenvolvendo P(x): $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 33$

O enunciado nos disse que há uma raíz natural. Do Resultado 5.1.1, sabemos que se existe uma raíz natural, ela deverá dividir o termo independente do polinômio. Ou seja, a raiz natural é divisor natural de –33, o que nos dá as seguintes possibilidades: 1, 3, 11, 33

Por inspeção, vemos que: $P(3) = (3-1)^3.(3+1) - 32 = 8.4 - 32 = 0$.

Ou seja, 3 é a raiz natural do polinômio. Devemos agora descobrir se o polinômio possui outras raízes reais positivas. Basta analisar os demais fatores do polinômio. Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini chegamos a (fica como **exercício** ao leitor):

Partindo do lado esquerdo da igualdade a ser mostrada:

$$(x+y.i)(1+x-y.i) = x+y.i+x^2-\cancel{x.y.i}+y.i+\cancel{x.y.i}-y^2.i^2$$
$$= x+y.i+\underbrace{x^2+y^2}_{|z|^2=1}$$
$$= x+y.i+1$$
$$\therefore (x+y.i)(1+x-y.i) = x+y.i+1$$

Como z é diferente de -1, segue:

$$x+y.i = \frac{x+y.i+1}{1+x-y.i}$$

Exercício 1.4 Seja 'k' essa raiz real.

$$P(k) = k^2+(a+b.i)k+(c+d.i) = 0 = 0+0.i$$
$$= (k^2+a.k+c)+(b.k+d).i = 0+0i$$

Da identidade, igualamos parte real de um lado à parte real do outro lado e parte imaginária de um lado à parte imaginária do outro lado da igualdade:

$$\begin{cases} k^2+ak+c=0 \\ bk+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2+ak+c=0 & \text{(i)} \\ k=-\dfrac{d}{b} & \text{(ii)} \end{cases}$$

De (ii) em (i):

$$\Rightarrow \left(-\frac{d}{b}\right)^2+a\left(-\frac{d}{b}\right)+c=0 \quad \therefore \quad d^2-abd+c.b^2=0$$

Exercício 1.5

$$\frac{k+i}{k-i} = \frac{k+i}{k-i}.\left(\frac{k+i}{k+i}\right) = \frac{(k+i)^2}{k^2+1} = \frac{k^2-1+2k.i}{k^2+1}$$

Queremos saber em que condições a expressão acima pode representar um complexo do tipo x+y.i

$$\left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)+\left(\frac{2k}{k^2+1}\right).i = x+y.i \iff \begin{cases} \left(\dfrac{k^2-1}{k^2+1}\right)=x \\ \left(\dfrac{2k}{k^2+1}\right)=y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k^2=\dfrac{(x+1)}{(1-x)} \\ \left(\dfrac{2k}{k^2+1}\right)=y \end{cases} \overset{*}{\iff} \begin{cases} k=\pm\sqrt{\dfrac{(x+1)}{(1-x)}} \\ 2.k=y.(k^2+1) \end{cases}$$

$$\iff \left\{\pm 2.\sqrt{\frac{(x+1)}{(1-x)}} = y.\left(\frac{x+1}{1-x}+1\right) \right. ,\ x\neq 1$$

$$\iff \left\{\pm 2.\sqrt{\frac{(x+1)}{(1-x)}} = y.\left(\frac{2}{1-x}\right) \right. ,\ x\neq 1$$

$$\iff \left\{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)=\frac{y^2}{(1-x)^2} \right. ,\ x\neq 1$$

$$\iff (x+1)(1-x)=y^2 \ ,\ x\neq 1$$

$$\iff x^2+y^2=1 \ ,\ x\neq 1$$

Que é justamente a condição inicial do problema! Como todas as passagens foram de "se e somente se", a ida e a volta valem sempre!

* - Pudemos fazer isso pois $1-x^2=y^2\geq 0$ e com isso a fração torna-se sempre positiva.

Exercício 1.6 Vimos que as raízes n-ésimas da unidade são:

$$1, \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right), \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{n}\right), \operatorname{cis}\left(\frac{6\pi}{n}\right), \ldots, \operatorname{cis}\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

Pegando 2 quaisquer números consecutivos dessa seqüência, temos que a razão entre eles é sempre um mesmo número (Fórmula 1.5.2)

$$\boxed{q=\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

Portanto as raízes n-ésimas da unidade formam uma P.G. de razão q dada acima.

$$\Rightarrow -3.a.x^2+(3a-2b).x+(b-c-a) \;\equiv\; 4.x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a = 4 \\ 3a-2b = 0 \\ b-c-a = 0 \end{cases}$$

$$\therefore\; a=-\frac{4}{3} \quad b=-2 \quad c=-\frac{2}{3} \quad \forall d$$

Logo os polinômios que atendem às condições são:

$$\boxed{P(x)=-\frac{4}{3}.x^3-2.x^2-\frac{2}{3}.x+d}$$

Da lei de formação deste polinômio, temos:

$$\begin{cases} P(0)=P(1)+(2)^2 \\ P(1)=P(2)+(4)^2 \\ \ldots \\ P(n-1)=P(n)+(2n)^2 \end{cases}$$

Somando todas as equações acima, a primeira parcela do membro à direita de uma equação irá sempre se cancelar com o membro à esquerda da equação seguinte, de modo que a soma de todas as equações acima seja dada por:

$$P(0)=P(n)+\left[2^2+4^2+\ldots+(2n)^2\right]$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{3}.0^3-2.0^2-\frac{2}{3}.0+d=-\frac{4}{3}.n^3-2.n^2-\frac{2}{3}.n+d+\sum_{k=1,\ldots,n}(2k)^2$$

Com isso, calculamos a soma pedida:

$$\boxed{\sum_{k=1,\ldots,n}(2k)^2=\frac{4}{3}.n^3+2.n^2+\frac{2}{3}.n}$$

Exercício 4.19

$$\frac{x^3+4}{x^3+1}\equiv 1+\frac{a}{x+1}+\frac{b.x+c}{x^2-x+1}$$

$$\Rightarrow (x^3+4)\equiv(x^3+1)+a.\frac{(x^3+1)}{x+1}+\frac{(b.x+c)(x^3+1)}{x^2-x+1}$$

Sabendo que -1 é raiz de x^3+1, podemos fatorar: $x^3+1=(x+1).(x^2-x+1)$.

Voltando na expressão da identidade:

$$\begin{aligned}(x^3+4)&\equiv(x^3+1)+a.(x^2-x+1)+(b.x+c).(x+1)\\ &\equiv x^3+1+a.x^2-ax+a+bx^2+bx+cx+c\\ &\equiv x^3+x^2.(a+b)+x.(b+c-a)+(1+a+c)\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} a+b=0 \\ b+c-a=0 \\ 1+a+c=4 \end{cases} \quad\therefore\quad a=1,\ b=-1,\ c=2 \quad\Rightarrow\quad a+b+c=2$$

Exercício 4.20 x^3+px+q é divisível por x^2+ax+b e x^2+rx+s. Sendo α e β raízes de x^2+ax+b e γ, δ raízes de x^2+rx+s, com certeza uma das raízes do primeiro será igual a uma das raízes do segundo (uma vez que o polinômio x^3+px+q pode ter no máximo 3 raízes). Sem perda de generalidade, tomemos $\alpha=\delta$.

Da relação de Girard da soma das raízes para os 3 polinômios, teremos:

$$\begin{cases} -a=\alpha+\beta \\ -r=\alpha+\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \alpha=-(a+r) \\ \beta=r \\ \gamma=a \end{cases}$$

Da relação de Girard para o produto das raízes de um dos polinômios:

$$b=\alpha\beta=-r.(a+r)$$

Exercício 4.21

Suponhamos por absurdo, que A(x) seja divisível por B(x). Ou seja, toda raiz k de A(x) será raiz de B(x). Logo, para x = k:

$$\underbrace{A(k)}_{=0}.C(k)+\underbrace{B(k)}_{=0}.D(k)=1 \quad\therefore\quad 0=1 \text{ (Absurdo!)}$$

Logo, nossa hipótese de que A(x) é divisível por B(x) é falsa. Ou ainda, A(x) não é divisível por B(x).

Exercício 4.22

Para a solução deste exercício usaremos, fundamentalmente, o Resultado 4.8.1 e as suas consequências diretas.

Se $(x-1)^k$ é fator do polinômio (isto é, x = 1 é raiz de multiplicidade k do polinômio), então, x = 1 deverá ser raiz de P(x), P'(x), ..., $P^{(k-1)}(x)$.

Verifiquemos isso agora:

$$P(4) = \frac{1}{36}.(4^2-1).(4^2-4).(4^2-9)+2 = 37$$

$$\therefore \quad \boxed{P(4) = 37}$$

Exercício 4.26

$$\begin{cases} P(x) = Q_1(x).(x+1)^3 + 1 \\ P(x) = Q_2(x).(x-1)^3 - 1 \end{cases}$$

Derivando as equações com relação à variável x.

$$\begin{cases} P'(x) = Q_1'(x).(x+1)^3 + 3.Q_1(x).(x+1)^2 = (x+1)^2.\overbrace{\left[Q'_1(x).(x+1)+3.Q_1(x)\right]}^{M(x)} \\ P'(x) = Q_2'(x).(x-1)^3 + 3.Q_2(x).(x-1)^2 = (x-1)^2.\underbrace{\left[Q'_2(x).(x-1)+3.Q_2(x)\right]}_{N(x)} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} P'(x) = (x+1)^2.M(x) \\ P'(x) = (x-1)^2.N(x) \end{cases}$$

Ou seja, sabemos então que -1 e 1 são ambos raízes duplas de P'(x). Sabemos então 4 de suas raízes. Como P(x) é do 5º grau, P'(x) é necessariamente do 4º grau. Sabemos, portanto, todas as raízes de P'(x).

Podemos escrever:

$$P'(x) = a.(x+1)^2(x-1)^2 = a.\left[(x-1).(x+1)\right]^2$$
$$= a.(x^2-1)^2 = a.x^4 - 2.a.x^2 + a$$

Para acharmos P(x), basta integrarmos P'(x):

$$P(x) = \int P'(x).dx = a.\frac{x^5}{5} - 2.a.\frac{x^3}{3} + a.x + C$$

Para determinarmos as constantes arbitrárias a e C, utilizemos as seguintes substituições:

$$\begin{cases} P(1) = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{5} - \frac{2a}{3} + a + C = -1 \\ P(-1) = 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{a}{5} + \frac{2a}{3} - a + C = 1 \end{cases} \quad \therefore \quad a = -\frac{15}{8}; \ C = 0$$

Portanto:

$$\boxed{P(x) = -\frac{3x^5}{8} + \frac{5x^3}{4} - \frac{15x}{8}}$$

Exercício 4.27 Sejam as raízes consecutivas: m-1, m, m+1. A soma dos quadrados delas é igual a 14, logo:

$$(m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 = 14$$

$$\Rightarrow \quad m^2 - 2m + 1 + m^2 + m^2 + 2m + 1 = 14 \Rightarrow \ 3m^2 = 12 \ \overset{m>0}{\Rightarrow} \ m = 2$$

As raízes são, portanto: 1, 2, 3. Das relações de Girard:

$$\begin{cases} S_G^1 = 1+2+3 = -a \\ S_G^2 = 1.2+1.3+2.3 = b \\ S_G^3 = 1.2.3 = -c \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a = 6 \\ b = 11 \\ c = -6 \end{cases}$$

Logo:

$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 = 193}$$

Exercício 4.28 Por inspeção, não é difícil notar que x = -1 é raiz do polinômio para qualquer valor de m. Fatorar o polinômio também não é tão difícil:

$$x^3 + x^2 + m.(x^2+x) + 9.(x+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x^2.(x+1) + m.x.(x+1) + 9.(x+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (x+1).(x^2 + m.x + 9) = 0$$

Vamos analisar o polinômio que contém as demais raízes da equação:

$$x^2 + m.x + 9 = 0 \iff x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 36}}{2}$$

As soluções serão reais e distintas se o conteúdo do radical no numerador for positivo. Não devemos esquecer do caso m = -10 no qual -1 é raiz dupla.

$$m^2 - 36 > 0 \iff (m+6).(m-6) > 0 \iff m < -6 \text{ ou } m > 6$$

Se o conteúdo do radical for 0, as duas raízes são iguais (m = 6 ou m = -6), ou ainda, a equação possui uma raíz de multiplicidade 2.

Da discussão acima, segue que: **I e II são verdadeiras e III é falsa.**

Substituindo as equações II e III na equação I, segue:

$$R(x) = A(x).D_1(x) - A(x).D_2(x).Q(x) = A(x).\underbrace{[D_1(x) - D_2(x).Q(x)]}_{D_3(x)} \quad \text{(Eq. IV)}$$

Da equação IV, segue que A(x) divide também R(x). Mas como A(x) divide N(x) e R(x), teremos que A(x) dividirá o MDC entre N e R (isto é, A(x) divide B(x)).
Além disso, analogamente ao que fizemos para A(x), faremos para B(x):

$$N(x) = B(x).D_4(x) \quad \text{(Eq. V)}$$
$$R(x) = B(x).D_5(x) \quad \text{(Eq. VI)}$$

Substituindo as Eqs. V e VI em I, segue:

$$B(x).D_5(x) = M(x) - B(x).D_4(x).Q(x) \Rightarrow M(x) = B(x).\underbrace{(D_5(x) + D_4(x).Q(x))}_{D_6(x)} \quad \text{(Eq VII)}$$

Segue, da equação VII que B(x) divide M(x). Mas como B(x) divide N(x), segue que B(x) divide o MDC de M e N, isto é, A(x).

Se A(x) divide B(x) e B(x) divide A(x), segue que: A(x) = B(x), ou seja:

$$MDC[M, N] = MDC[N, R]$$

OBS: O Algoritmo de determinação do MDC se vale desta propriedade. Dados dois polinômios M e N, começa a busca pelo seu MDC dividindo M por N; em seguida, divide-se N pelo resto R da primeira divisão (o MDC entre esses dois polinômios é o mesmo MDC procurado), e assim sucessivamente. Se em alguma dessas divisões sucessivas encontrarmos um resto nulo, encontramos o maior divisor comum do ultimo par da divisão, que, de acordo com o que acabamos de provar é justamente MDC[M,N].

Exercício 4.48 Seja P(x) um polinômio genérico de grau finito n. Vejamos como P(x) se comporta para alguns pequenos valores inteiros. Fazendo x = 1:

$$P(1^2 + 1) = (P(1))^2 + 1 \Rightarrow P(2) = 2$$

Conhecendo, P(2), façamos x = 2:

$$P(2^2 + 1) = (P(2))^2 + 1 = 2^2 + 1 \Rightarrow P(5) = 5$$

Conhecendo P(5), façamos x = 5:

$$P(5^2 + 1) = (P(5))^2 + 1 = 5^2 + 1 \Rightarrow P(26) = 26$$

Epa! Você também notou que, se continuarmos nessa lógica, encontraremos infinitos valores inteiros do tipo k, para os quais P(k) = k?

Ou ainda, se definirmos Q(x) = P(x) – x, existem infinitos valores raízes inteiras k de Q(x). Ora, mas se P(x) é de grau n finito, Q(x) também será.
É possível achar mais de n raízes inteiras para Q(x) qualquer que seja n inteiro, repetindo o processo abaixo n + 1 vezes. Do resultado da questão 4.39, segue que Q(x) é o polinômio identicamente nulo!

$$Q(x) = P(x) - x \equiv 0 \Rightarrow \boxed{P(x) = x}$$

Exercício 4.49 Começaremos atacando este difícil problema, notando o que acontece ao substituírmos alguns valores de x.

$$P(x^2) + P(x).P(x+1) \equiv 0 \quad \textbf{(Eq. I)}$$

Por exemplo, para x = 0:

$$P(0) + P(0).P(1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(0) = 0 \\ \text{ou} \\ P(1) = -1 \end{cases}$$

De cara, parece que descobrimos algo de importante. Ou x = 0 é necessariamente raiz do polinômio, ou P(1) será -1 (ou até mesmo ambos podem ser verdade!). <u>Suponhamos x = 0 como raíz, por enquanto</u>.

Fazendo x = -1 na Eq. I.

$$P(1) + P(-1).\underbrace{P(0)}_{=0} = 0 \Rightarrow P(1) = 0$$

Ou seja, o fato de x = 0 ser raíz, implica que x = 1 é raíz também! Será que o fato de x = 1 ser raíz implica em conhecermos alguma outra raiz?

Fazendo x = 1 na Eq. I.

$$P(1) + P(1).P(2) = 0 \Rightarrow 0 + 0 = 0$$

Nenhuma informação interessante saiu daí. Vamos ter que nos contentar com a única conclusão de que "0 ser raíz implica 1 ser raíz".

Repare quantas consequências teremos se x = 0 for raíz. Ja concluímos que, se x = 0 é raíz, então 1 é raiz. Vamos buscar outras raízes do polinômio. Seja k complexo (podendo ou não ser real), diferente de 0 e diferente de 1 uma raíz de P(x). Ou seja, tome k complexo tal que P(k) = 0:

$$P(k^2) = -\underbrace{P(k)}_{=0}.P(k+1) = 0 \Rightarrow P(k^2) = 0$$